Aprendamos matemáticas

Luis Hernando Alfonso C.

editora dosmil

Aprendamos matemáticas

Luis Hernando Alfonso Castillo

Primera edición

ACCION CULTURAL POPULAR

Colección Ciencia

No. 21

CARATULA: Jaime Ramírez Palmar
ILUSTRACIONES: Bernardo Caicedo Sáenz

IMPRESO EN COLOMBIA PRINTED IN COLOMBIA

Se terminó de imprimir este libro, en los talleres de Editorial Andes, en el mes de febrero de 1979

ISBN: 84-8275-042-9

editora dosmil

Cra. 39A No. 15-11. Tel: 2694800 - Bogotá, Colombia.

INDICE

SUGERENCIAS PARA EL LECTOR

Lea atentamente cada tema. Cuando esté seguro de haber comprendido lo que allí se dice, resuelva los ejercicios que se proponen al final. Si tiene dudas vuelva a leer el texto. Después de haber resuelto el grupo de ejercicios propuestos, consulte, al final del libro, las respuestas, para estar completamente seguro de que lo que respondió es correcto.

Discuta los temas aquí tratados con otras personas y trate de aplicarlos a diversas situaciones.

De esta manera, la lectura del libro será más provechosa y de mayor utilidad.

El autor

PRIMERA PARTE

Los conjuntos

1. LA MATEMATICA EN NUESTRA VIDA

Cuando una persona oye, o lee, la palabra matemática, la asocia inmediatamente a números y, tal vez, a figuras geométricas también.

Esto es muy natural porque la aritmética y la geometría son los aspectos más populares de la matemática.

Pero la matemática abarca mucho más que estos dos aspectos y su estudio es tan extenso que no basta la vida de una ni de muchas personas para agotarlos.

Casi todos los días se producen nuevos resultados en todas las ramas especializadas de la matemática.

Muchos de estos resultados se reflejan de una manera o de otra en nuestra vida, pues producen avances en la ciencia y en la técnica que benefician a la humanidad.

La matemática es una poderosa herramienta que aprovechan los científicos y los técnicos para sus investigaciones.

Pero hay otro aspecto de la matemática que ha atraído a quienes se han dedicado a su estudio desde la antigüedad hasta nuestros días.

Es la belleza que ella encierra. El placer intelectual que produce, semejante al que produce una obra de arte a un pintor, a un escultor o a un músico.

Para muchos investigadores de la matemática es más importante el aspecto estético de su trabajo que la aplicación que pueda tener. Aun los resultados más sencillos, los conceptos más simples de la matemática encierran una gran belleza, como reflejo que son de la armonía del universo.

Para muchas personas la matemática es desagradable, difícil o aburrida. Pero esto depende con frecuencia de la forma como les fue enseñada siendo niños.

La matemática es un lenguaje que nos permite interpretar muchos aspectos de la naturaleza. Por esto el conocimiento de la matemática elemental es tan importante como el conocimiento de la lengua materna.

La matemática de uso diario no es, ni mucho menos, difícil. Por el contrario, toda persona normal puede aprenderla.

Desde luego, como ocurre siempre que se profundiza en una ciencia, se necesita una disciplina de trabajo y unas dotes intelectuales que no todo el mundo posee.

Una de las cosas que hace parecer difícil a la matemática es el uso de símbolos especiales. Sin embargo esto es necesario para simplificar la escritura y hacer más manejables los procesos.

Imagínese el lector que tuviéramos que escribir, por ejemplo, "dos más tres es igual a cinco" en lugar de "2 + 3 = 5" y el trabajo inútil que se necesitaría para expresar con palabras una operación más complicada.

Como decíamos antes, la matemática aplicada interviene de muchas maneras en nuestra vida. Pero hay un aspecto que interesa personalmente a cada uno: es nuestra formación intelectual.

Por ser la matemática una disciplina lógica, forma en nosotros hábitos de razonamiento correcto y objetivo. Proporciona a la inteligencia lo que el ejercicio físico adecuado proporciona al cuerpo: un desarrollo armonioso y equilibrado.

La matemática no resuelve todos los problemas del ser humano, como no lo hace ninguna rama de la ciencia por sí misma. Pero contribuye a su perfección de una manera muy efectiva.

EJERCICIOS (1)

1) ¿Con qué se asocia usualmente la palabra "matemática"?

2) ¿Cuáles son los aspectos más conocidos de la matemática?

3) ¿Qué comentario puede usted hacer sobre la extensión del conocimiento matemático?

4) ¿De qué manera influye la matemática en nuestra vida?

5) Además de las aplicaciones prácticas, ¿qué otros aspectos tiene la matemática?

6) ¿Por qué es desagradable la matemática para muchas personas?

7) ¿Qué comentario puede usted hacer sobre su propia actitud con respecto a la matemática?

8) ¿Por qué es necesario el uso de símbolos especiales en la matemática?

9) ¿De qué manera actúa la matemática en el desarrollo intelectual de una persona?

2. EL CONCEPTO DE CONJUNTO

En los últimos años se ha puesto de moda la enseñanza de los conjuntos desde los niveles elementales.

Muchos identifican este hecho con la llamada matemática moderna.

El tema de los conjuntos no es tan nuevo, sin embargo, pues desde el siglo pasado se viene hablando de este tema.

La tendencia actual de popularizar el lenguaje de los conjuntos se debe a que dicho lenguaje es unificador y se puede aplicar en muchos campos, tanto dentro como fuera de la matemática.

El estudio de los conjuntos está muy relacionado con el de la lógica. Por ello contribuye de manera muy efectiva a la elaboración de razonamientos correctos.

El concepto de conjunto no es nada difícil de captar. En efecto, estamos rodeados de conjuntos.

Esta página tiene un conjunto de palabras: cada palabra es un conjunto de letras.

Los llamados nombres colectivos designan precisamente conjuntos. Así, un conjunto de ovejas se llama rebaño. Un conjunto de pájaros que pasa volando es una bandada. Un conjunto de soldados es una compañía. Un conjunto de perros es una jauría.

EJERCICIOS (2)

1) ¿Cuál se considera como una característica importante en la enseñanza moderna de la matemática?

2) ¿Qué ventajas tiene el lenguaje de los conjuntos?

3) ¿Con qué otra ciencia está relacionado el estudio de los conjuntos?

4) Dé tres ejemplos de conjuntos que no estén mencionados en el texto anterior.

5) Mencione cuatro nombres que designen conjuntos.

3. REPRESENTACION DE LOS CONJUNTOS

Un conjunto de vacas en un corral lo podemos representar por medio de un dibujo como el de la figura 1. Para distinguir una de otra les hemos puesto las letras a, b, c, d. (Figura 1).

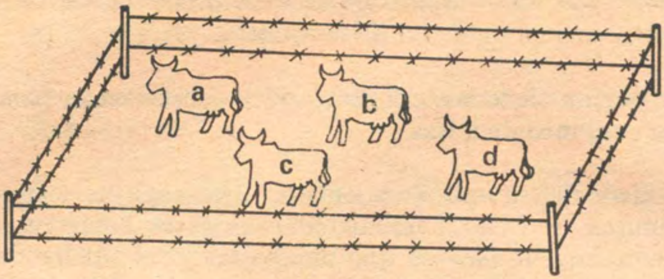


FIGURA 1

Podemos simplificar esta representación omitiendo muchos detalles del dibujo anterior. El corral se representará por medio de una curva cerrada y cada vaca por medio de un punto al cual señalaremos con una letra minúscula: a, b, c, d. (Figura 2).

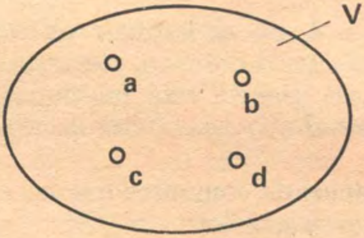


FIGURA 2

A este conjunto de vacas lo designaremos con una letra mayúscula: V.

Este conjunto lo representaremos también así:

$$V = \{a, b, c, d\}$$

Supongamos que queremos representar el conjunto de todos los animales de una pequeña granja, en la cual, además de la vacas a, b, c, d, hay un perro (p), una gallina (g), y un conejo (j). Entonces podemos llamar A, el conjunto de los animales de la granja y representar este conjunto por medio de un rectángulo dentro del cual representamos el conjunto V del cual hablamos primero (Figura 3).

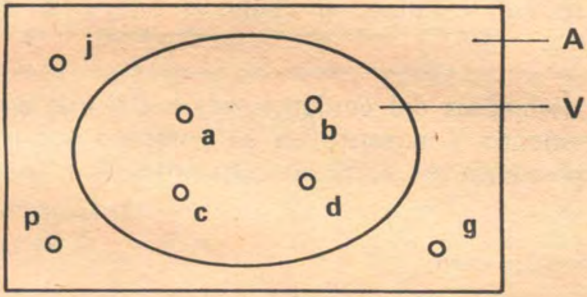


FIGURA 3

Todos los elementos del conjunto V están en el conjunto A. Decimos entonces que V es un subconjunto de A y escribimos

$$V \subset A$$

Esto se lee: **"V está contenido en A".**

Las vacas, a, b, c, d, son elementos del conjunto V. Para expresar que, por ejemplo, a es un elemento del conjunto V escribimos,

$$a \in V$$

Esto se lee: **"a es un elemento de V".**

Para expresar que, por ejemplo, j no es un elemento del conjunto V, escribimos,

$$j \notin V$$

Esto se lee: "j no es un elemento de V".

El conjunto más grande que se considere en una discusión dada se llama referencial.

En nuestro ejemplo, el conjunto referencial es el conjunto A.

Los elementos del conjunto referencial que no están en el conjunto V, constituyen un conjunto que se llama el complemento de V. El complemento de V se simboliza,

$$\overline{V}$$

En nuestro caso,

$$\overline{V} = \{p, g, j\}$$

El orden en que se escriben los elementos de un conjunto no es importante, o sea que, por ejemplo,

$$\{a, b, c, d\} \quad , \quad \{a, b, d, c\} \quad , \quad \{c, b, d, a\}$$

designan el mismo conjunto.

EJERCICIOS (3)

1) Represente en forma más simple el conjunto de la figura 4.

2) Escriba simbólicamente: el complemento de V es un subconjunto de A.

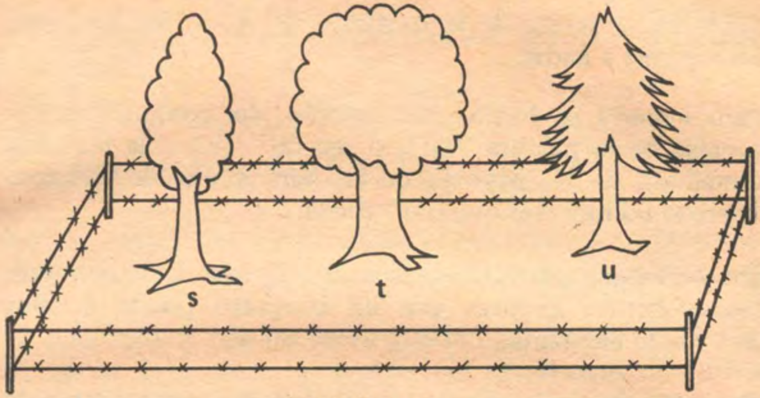


FIGURA 4

3) Escriba simbólicamente: b es un elemento de V; c no es un elemento del complemento de V; g es un elemento de A.

4) Escriba en palabras del lenguaje corriente:

$\{g, j\} \subset A; \; j \notin V; \; g \in \overline{V}; \; d \in V$

5) Represente en otras tres formas el conjunto $\{a, b, c\}$.

4. CONJUNTOS UNITARIOS Y CONJUNTO VACIO

Merecen atención especial estos conceptos que no son fáciles de aceptar porque no se usan en el lenguaje corriente. Pero son necesarios para lograr uniformidad en el lenguaje de los conjuntos.

En el lenguaje corriente, la palabra conjunto hace pensar en pluralidad, es decir, en más de uno. Por eso cuando se habla del conjunto de la vocales, $\{a, e, i, o, u\}$, esto no repugna a nadie.

Pero cuando se habla, por ejemplo, del conjunto de las vocales de la palabra "sal", o sea de $\{a\}$, la reacción inmediata de la mayoría de las personas es de rechazo: "pero si no hay más que una" dicen.

Sin embargo, para adaptarnos al lenguaje de los conjuntos, debemos aceptar que un conjunto puede constar de un solo elemento.

Debemos también aceptar otra idea que probablemente repugna aún más: que un conjunto no tenga elementos.

En el lenguaje corriente se dice, por ejemplo, "no hay aves de cuatro patas".

En el lenguaje de los conjuntos esto mismo se expresa así: "el conjunto de las aves de cuatro patas es vacío".

El conjunto vacío juega un papel muy importante en el lenguaje de los conjuntos. Se designa con el símbolo ϕ que se lee "conjunto vacío".

EJERCICIOS (4)

1) Represente el conjunto de las letras de la palabra "té".

2) Represente el conjunto de las vocales de la palabra "té".

3) Represente el conjunto de las consonantes de la palabra "té".

4) Represente el conjunto de los perros que tienen alas.

5. DIAGRAMAS PARA UN ATRIBUTO

En el ejemplo que vimos antes, el conjunto A (de los animales de una pequeña granja) es el conjunto referencial.

El conjunto V (de las vacas que hemos llamado a, b, c, d) se ha representado dentro del referencial de forma rectangular por medio de una región limitada por una curva cerrada.

Ha quedado así el referencial partido en dos regiones, a saber: la que representa el conjunto de las vacas y la que representa el conjunto de los animales de la granja que no son vacas.

Este se llama un diagrama para un atributo, porque dentro del conjunto referencial solo se ha representado un conjunto (el conjunto V). (Figura 5).

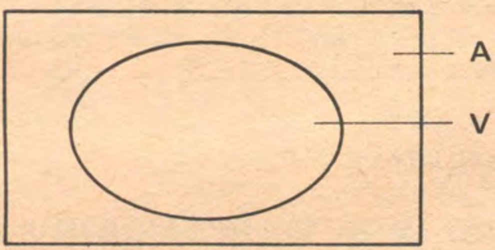


FIGURA 5

EJERCICIOS (5)

1) El diagrama de la figura 6 representa como conjunto referencial el de las flores (F) y en él está el conjunto de las rosas (R). Reproduzca este diagrama y coloree con dos colores diferentes las dos regiones en las cuales está partido el referencial.

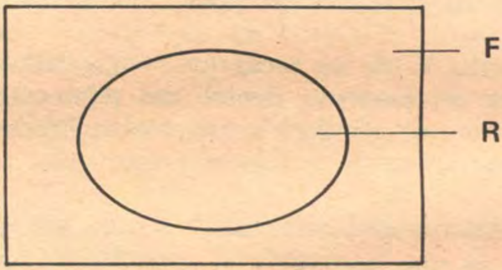


FIGURA 6

2) Explique cuál región representa el conjunto R y cuál región representa el conjunto $\overline{R}$.

3) Represente en un diagrama el conjunto A de los árboles, como referencial y el conjunto N de los nogales.

4) n es un nogal; v es un árbol que no es un nogal. Localice en el diagrama del ejercicio anterior puntos que representen a n y a v, en las regiones que corresponda.

5) En el mismo diagrama coloree de azul el conjunto N y de rojo del conjunto $\overline{N}$.

6. DIAGRAMAS PARA DOS ATRIBUTOS

Tomemos como conjunto referencial el de los perros

(P). En él vamos a considerar el de los perros grandes (G) y el de los perros negros (N).

Entonces podemos hacer la representanción gráfica de la figura 7.

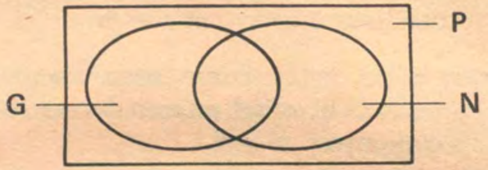


FIGURA 7

El conjunto referencial queda partido en los que aparecen sombreados en la figura 8.

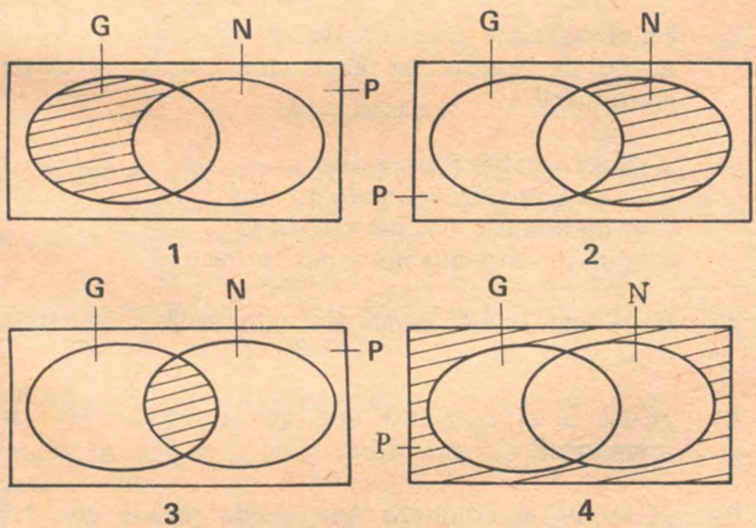


FIGURA 8

1— Perros grandes que no son negros.

2— Perros negros que no son grandes.

3— Perros negros y grandes.

4— Perros que no son negros ni grandes.

El diagrama de la figura 8 se llama diagrama para dos atributos, porque dentro del referencial solo se han representado dos conjuntos: G y N.

EJERCICIOS (6)

1) Tomando como conjunto referencial el de los hombres (H), represente en un diagrama el conjunto de los hombres flacos (F) y el de los hombres altos (A).

2) En el diagrama del conjunto anterior, represente, por medio de puntos, los elementos que se detallan a continuación:

   x es un hombre flaco y alto
   y es un hombre flaco pero no alto
   z es un hombre alto pero no flaco
   t es un hombre que no es alto ni flaco.

3) Raye con líneas azules el conjunto $\overline{A}$ y con líneas rojas el conjunto $\overline{F}$.

4) ¿Cuál es el conjunto que queda rayado con azul solamente?

5) ¿Cuál es el conjunto que queda rayado con rojo solamente?

6) ¿Cuál es el conjunto que queda rayado de azul y de rojo al mismo tiempo?

7) ¿Cuál conjunto queda sin rayar?

7. INTERSECCION ENTRE DOS CONJUNTOS

Se llama intersección entre dos conjuntos al conjunto cuyos elementos pertenecen al mismo tiempo a los dos conjuntos.

En el ejemplo de los perros, la región marcada con 3 corresponde a la intersección entre los conjuntos G y N.

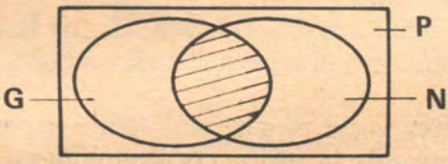


FIGURA 9

O sea que el conjunto de los perros grandes y negros es la intersección entre el conjunto de los perros grandes y el conjunto de los perros negros.

La intersección entre los conjuntos G y N se simboliza

$$G \cap N$$

y se lee: "G intersección N".

Para expresar que x es un perro grande y negro escribimos en símbolos:

$$x \in (G \cap N)$$

Para expresar que x es un perro grande que no es negro, escribimos,

$$x \in (G \cap \overline{N})$$

Para expresar que x es un perro que no es grande y sí es negro, escribimos,

$$x \in (\overline{G} \cap N)$$

Para expresar que x es un perro que no es grande ni negro, escribimos,

$$x \in (\overline{G} \cap \overline{N})$$

EJERCICIOS (7)

1) Represente de nuevo en un diagrama el conjunto de los hombres (H) como referencial y los conjuntos F, de los hombres flacos y A, de los hombres altos. Coloree de rojo la región correspondiente a $F \cap A$.

2) Repita tres veces el diagrama anterior para representar, coloreando la región correspondiente, los conjuntos: $F \cap \overline{A}$; $\overline{F} \cap A$; $\overline{F} \cap \overline{A}$.

3) Exprese en símbolos adecuados cada una de las siguientes frases: u es un hombre flaco y alto; v es un hombre flaco y no alto; t es un hombre no flaco y sí alto; s es un hombre ni flaco ni alto.

4) En un centro de salud dan atención médica gratuita a las madres que tengan más de 3 hijos y vivan a menos de 6 cuadras del centro de salud.

Se presentan a solicitar servicio gratuito: María que tiene 2 hijos y vive a 5 cuadras del centro; Juana, que tiene 5 hijos y vive a 2 cuadras del centro; Rosa, que tiene un hijo y vive a 8 cuadras del centro; Julia, que tiene 4 hijos y vive a 10 cuadras del centro.

¿Quién ha entendido correctamente el aviso del centro de salud y quién no? Explique sus respuestas. Ayúdese con un diagrama.

8. UNION ENTRE DOS CONJUNTOS

Si reunimos el conjunto de los perros grandes (G) con el de los perros negros (N), obtenemos un conjunto de perros que podemos representar con la región sombreada de la figura 10.

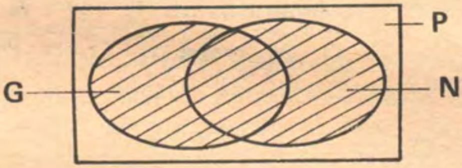


FIGURA 10

El conjunto representado por la región sombreada se llama la unión entre G y N. Se simboliza.

$$G \cup N$$

y se lee: "G unión N".

Los únicos perros que no pertenecen a $G \cup N$ son los que no son ni grandes ni negros.

Cuando se dice que $x \in (G \cup N)$ se está expresando que x puede ser un perro grande y negro, o puede ser grande aunque no sea negro, o puede ser negro, aunque no sea grande.

Esto se expresa de una manera más simple así:

$$x \in G, \text{ y/o } x \in N$$

Si una persona va a comprar un perro y dice: "quiero un perro que sea negro y/o grande, está queriendo decir que el perro puede ser negro y grande, o negro y no grande, o puede ser no negro y sí grande.

Según hemos observado antes, los únicos elementos que no están en $G \cup N$ son los que están en $\overline{G} \cap \overline{N}$.

Esto significa que los elementos de $G \cup N$ son los del complemento de $\overline{G} \cap \overline{N}$, o sea, $\overline{\overline{G} \cap \overline{N}}$. Podemos decir entonces que

$$G \cup N = \overline{\overline{G} \cap \overline{N}}$$

O sea que la unión entre G y N es igual al complemento de la intersección entre el complemento de G y el complemento de N. (Figura 11).

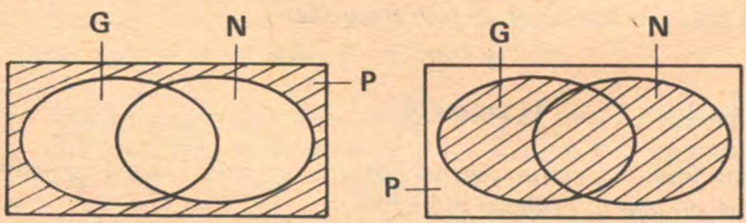


FIGURA 11

EJERCICIOS (8)

1) Repita el diagrama que representa el conjunto de los hombres (H), el de los hombres flacos (F) y el de los hombres altos (A).

   Coloree la región correspondiente a $F \cup A$.

2) Exprese en palabras y explique qué significa:

   $$t \in (F \cup A)$$

3) Usando intersección y complemento, exprese de otra manera $F \cup A$.

4) Una empresa necesita un hombre casado y/o mayor de 30 años. Se presentan a solicitar el empleo: Juan, que tiene 28 años y es casado; Pedro, que tiene 32 años y es soltero; Luis, que tiene 26 años y es soltero; Antonio que tiene 35 años y es casado. ¿Cuál de ellos no entendió lo que decía el aviso de la empresa? Explique su respuesta, ayúdese con un diagrama.

9. REPRESENTACION DE CONJUNTOS EN FORMA EXTENSIVA

Se dice que un conjunto está representado en forma extensiva cuando se nombran (o escriben) todos los elementos que lo constituyen.

Ejemplo: el conjunto de las vocales se representa extensivamente así:

$$\{a, e, i, o, u\}$$

Vamos a tomar como referencial el conjunto

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

En este conjunto vamos a considerar los subconjuntos

$$A = \{a, e, i\} \quad , \quad B = \{i, o, u\}$$

Entonces podemos escribir lo siguiente:

$\overline{A} = \{o, u\}$

$\overline{B} = \{a, e\}$

$A \cap B = \{i\}$

$A \cup B = \{a, e, i, o, u,\}$ o sea que $A \cup B = V$

$A \cap \overline{B} = \{a, e,\}$, o sea que $A \cap \overline{B} = \overline{B}$

$\overline{A} \cap B = \{o, u\}$, o sea que $\overline{A} \cap B = \overline{A}$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$

$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = V$

O sea que $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$, como era de esperarse. (Figura 12).

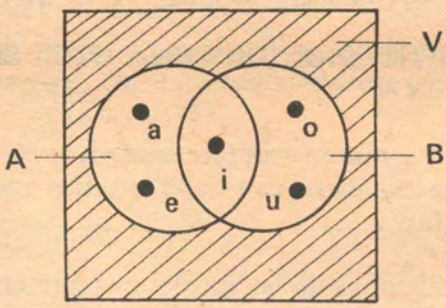


FIGURA 12

En la figura 12 se han representado los conjuntos V, A, B. La región rayada corresponde al conjunto vacío.

En este ejemplo podemos observar también que el complemento de $\overline{A}$ es A, o sea que $\overline{\overline{A}} = A$.

En efecto, $A = \{a, e, i\}$; $\overline{A} = \{o, u\}$; $\overline{\overline{A}} = \{a, e, i\}$

También podemos observar que $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

El complemento del conjunto vacío es el referencial.

El complemento del referencial es el conjunto vacío.

EJERCICIOS (9)

1) Considere como refencial el conjunto

   $R = \{c, d, f, g, h, i, j\}$

   y los siguientes subconjuntos:

   $M = \{c, f, g\}$, $N = \{c, g, h\}$

   Represéntelos gráficamente mediante un diagrama.

2) Determine extensivamente $M \cap N$.

3) Determine extensivamente $M \cup N$.

4) Determine extensivamente los siguientes conjuntos:

   $\overline{M}$; $\overline{N}$; $\overline{M} \cap \overline{N}$; $\overline{M \cup N}$.

5) Complete las siguientes igualdades:

   $\overline{R} = \ldots$; $\overline{\phi} = \ldots$

6) Verifique que $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

10. LA INCLUSION ENTRE CONJUNTOS

Ya hemos hablado de la inclusión entre conjuntos cuando hemos dicho, por ejemplo, que el conjunto de los perros grandes (G) y el conjunto de los perros negros (N), son subconjuntos del conjunto de los perros (P).

$$G \subset P \ ; \ N \subset P$$

Lo anterior se lee: "G está contenido en P" y "N está contenido en P.".

Cuando se dice que $G \subset P$, por ejemplo, se quiere expresar que todos los elementos de G son también elementos de P.

Consideremos el conjunto G de los perros grandes y el conjunto L de los perros grandes y lanudos.

Es claro que $L \subset G$ y se puede representar gráficamente esta situación como aparece en la figura 13.

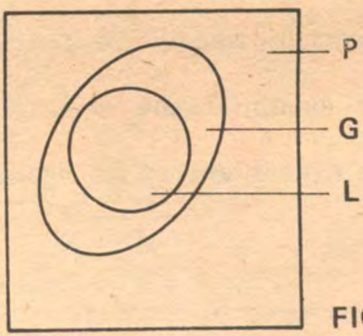


FIGURA 13

Decir que $L \subset G$, significa que todo elemento x del referencial P que pertenezca a L, pertenece también a G.

En otras palabras, si $x \in L$, entonces, $x \in G$, donde x es un elemento del referencial P.

Podemos expresar la relación de inclusión entre el conjunto L y el conjunto G, haciendo uso de nuestros conocimientos sobre intersección y complemento.

En efecto, observamos que si $L \subset G$, no puede haber elementos de L por fuera de G, o sea que no puede haber elementos de L en el complemento de G.

Esto lo podemos expresar así:

$$L \cap \overline{G} = \phi$$

EJERCICIOS (10)

1) Represente en un diagrama el conjunto H de los hombres, como referencial y en él, el conjunto de los hombres flacos (F) y el conjunto de los hombres flacos que son calvos (C).

2) Exprese con símbolos la relación de inclusión que existe entre los conjuntos C y F.

3) Exprese la inclusión usando intersección y complemento.

4) Si Q, R son conjuntos contenidos en el mismo referencial y $Q \cap \overline{R} = \phi$· ¿Cuál está contenido en cuál? Represente gráficamente esta situación.

11. LA IGUALDAD ENTRE CONJUNTOS

Cuando una persona dice a otra, por ejemplo, "mi vestido es igual al suyo", lo que quiere expresar es que los vestidos se parecen tanto que no se distingue cuál de los dos es, si se mira uno solo de ellos.

En el lenguaje corriente la palabra "igual" se usa con el mismo significado de "parecido".

En matemática, "igual" tiene un significado más preciso. Cuando se escribe el signo de igualdad (=) entre dos expresiones, se quiere decir que las dos expresiones designan el mismo conjunto o el mismo individuo.

Así, cuando se escribe, por ejemplo, que $2 + 2 = 4$, estamos afirmando que "2 + 2" y "4" designan el mismo número.

Esto significa que no es correcto, hablando matemáticamente:

"mi vestido = su vestido" pues equivaldría a decir que mi vestido es su vestido, lo que no es cierto si se trata de dos vestidos (el mío y el suyo).

La igualdad entre conjuntos se puede expresar en términos de inclusión. Así, por ejemplo, si

$$B = \{u, v, t, j\} \quad y \quad D = \{v, t, j, u\}$$

entonces observamos que todos los elementos de B están en D, o sea que

$$B \subset D$$

También observamos que todos los elementos de D están en B, o sea que

$$D \subset B$$

Entonces no hay elementos de D fuera de B ni elementos de B fuera de D, o sea que la región que aparece rayada en el diagrama de la figura 14, representa al conjunto vacío.

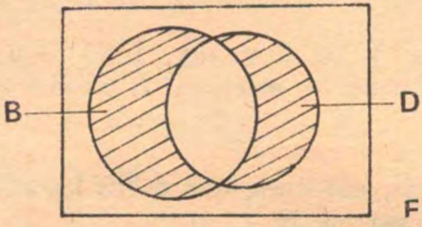


FIGURA 14

Esto quiere decir que B y D son dos símbolos que designan el mismo conjunto, por lo cual se puede escribir,

$$B = D$$

EJERCICIOS (11)

1) Diga en cuál de los casos siguientes está bien usada la igualdad, desde el punto de vista de la matemática:

   a) "Mi lápiz es igual al suyo"

   b) "El hermano de mi padre = mi tío"

   Explique su respuesta.

2) Dados los conjuntos

   $T = \{1, 2, 4\}$, $U = \{1, 4, 3\}$, $J = \{4, 2, 1\}$,

   $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, establezca las relaciones de inclusión que existen entre ellos.

3) Represente en un diagrama los conjuntos del ejercicio anterior, tomando a K como referencial.

12. LA TRANSITIVIDAD DE LA INCLUSION

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$B = \{u, v, t, j\} \ , \ L = \{u, v, t\} \ , \ N = \{u, v\}$$

Observamos que $N \subset L$ y que $L \subset B$, o sea que todos los elementos de N están en L y todos los de L están en B.

Podemos deducir, entonces, que todos los elementos de N están en B, o sea que $N \subset B$.

En resumen,

$$\begin{array}{rl} & \text{Si } N \subset L \\ & \text{y } \ L \subset B \\ \text{entonces} & \quad N \subset B \end{array}$$

En la figura 15 representamos las relaciones de inclusión entre los conjuntos N, L, B.

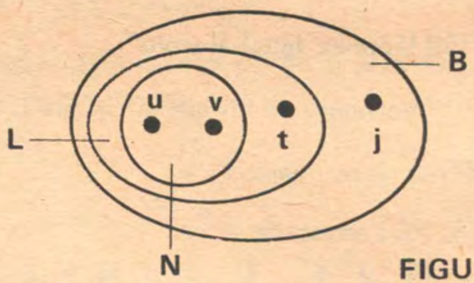


FIGURA 15

Cuando decimos que "todos los seres humanos son mortales", estamos estableciendo la inclusión entre el conjunto H, de los seres humanos y el conjunto M de los seres mortales:

$$H \subset M$$

Si consideramos además el conjunto C de los colombianos, es claro que

$$C \subset H$$

O sea que todos los colombianos son seres humanos.

A partir de las inclusiones

$$C \subset H \text{ y } H \subset M$$

podemos deducir que

$$C \subset M$$

O sea que todos los colombianos son mortales.

Se dice que la inclusión es transitiva por cumplir esta propiedad.

EJERCICIOS (12)

1) Exprese, usando inclusión, las siguientes afirmaciones:

    a) Todos los conejos (C) son roedores (R).

    b) Todos los roedores (R) son vertebrados (V).

2) De las inclusiones del ejercicio anterior, deduzca una tercera inclusión y exprésela en palabras.

3) Represente los conjuntos C, R, V en un diagrama, en el cual el referencial es A, conjunto de los animales.

4) Exprese, usando intersección y complemento, cada una de las inclusiones de los ejercicios 1 y 2.

5) Deduzca una conclusión válida a partir de las siguientes afirmaciones:

   a) Todos los soldados son valientes;

   b) Todos los valientes mueren jóvenes.

   Ayúdese con un diagrama. No se preocupe por la validez de las afirmaciones a) y b) sino por la validez de la conclusión que se obtiene, si se aceptan a) y b).

6) Determine si es o no correcta la conclusión que se obtiene de las siguientes afirmaciones:

   a) Todas las manzanas son frutas;

   b) Todas las naranjas son frutas;

   Conclusión: todas la naranjas son manzanas. Explique la respuesta, ayudándose con un diagrama.

13. LAS EXPRESIONES TODOS, ALGUNOS, NINGUNO, EN TERMINOS DE CONJUNTOS

Cuando decimos, por ejemplo, que todos los seres humanos son mortales, estamos expresando la inclusión entre el conjunto H de los seres humanos y el conjunto M de los seres mortales:

$$H \subset M \qquad \text{(figura 16)}$$

Cuando decimos, por ejemplo, que algunos seres humanos son perezosos, no podemos establecer inclusión entre el conjunto H (de los seres humanos) y el conjunto P (de los seres perezosos).

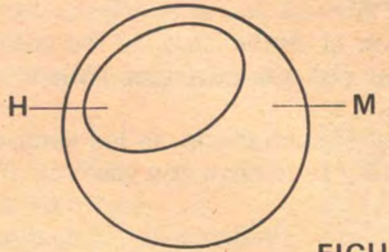


FIGURA 16

Pero sí podemos afirmar que el conjunto P y el conjunto H tienen elementos en común, o sea que su intersección no es el conjunto vacío:

$$H \cap P \neq \phi$$

Lo anterior se lee:

"H intersección P es diferente del conjunto vacío".

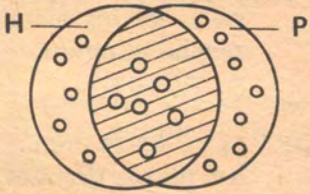


FIGURA 17

Cuando afirmamos, por ejemplo, que "ningún ser humano es de color verde", estamos estableciendo que la intersección entre el conjunto H (de los seres humanos) y el conjunto V (de los seres de color verde) es vacío:

$$H \cap V = \phi$$

FIGURA 18

EJERCICIOS (13)

1) Exprese, con el simbolismo de los conjuntos: todas las bicicletas (B) son vehículos (V).

2) Exprese con el simbolismo de los conjuntos: algunos vehículos (V) funcionan con gasolina (G).

3) Exprese con el simbolismo de los conjuntos: ninguna bicicleta es más rápida que un caballo de carreras. (C = conjunto de los objetos más rápidos que un caballo de carreras).

4) Haga una representación gráfica de cada uno de los casos de los ejercicios anteriores, usando como referencial el conjunto M (de los objetos que sirven para movilizarse).

5) Si P es el conjunto de los perros, G el conjunto de los perros grandes, C el conjunto de los perros que comen abundantemente, L el conjunto de los perros livianos, exprese en palabras cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) $N \cap G \neq \phi$; b) $G \subset C$;
   c) $L \cap G = \phi$

14. TABLAS DE PERTENENCIA

Si x es un elemento de un conjunto referencial dado y A es un conjunto contenido en el mismo referencial, entonces solo puede presentarse una de las posibilidades siguientes:

$x \in A$ (x pertenece al conjunto A)
$x \notin A$ (x no pertenece al conjunto A)

y necesariamente se presenta una de ellas.

Esto lo podemos expresar mediante una tabla así:

A	$\in$	$\notin$

(Tabla de pertenencia para un conjunto)

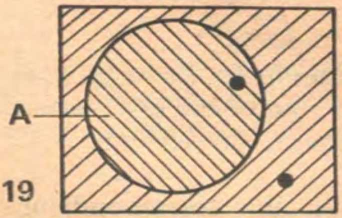


FIGURA 19

Estas dos posibilidades corresponden a las dos regiones en que queda partido el conjunto referencial en un diagrama como el de la figura 19.

Si intervienen dos conjuntos, A y B, las posibilidades que tiene un elemento x del referencial para pertenecer o no a los conjuntos A y B son las siguientes.

A	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
B	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$

(Tabla de pertenencia para dos conjuntos)

Las cuatro posibilidades que aparecen en la tabla corresponden a las cuatro regiones en las cuales se parte el referencial cuando se representan los conjuntos A y B como en la figura 20.

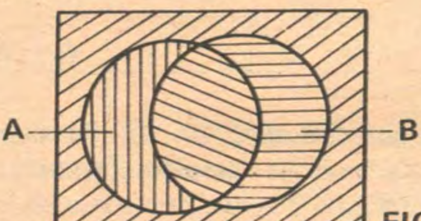


FIGURA 20

El conjunto referencial (R) y el conjunto vacío (ϕ) tienen como tablas respectivas las siguientes:

R	$\in$

ϕ	$\notin$

En efecto, dado un conjunto referencial R, un elemento x no puede sino pertenecer a él. Con respecto al conjunto vacío, un elemento x no puede sino no pertenecer.

La tabla correspondiente a un conjunto A y a su complemento, $\overline{A}$ es la siguiente:

A	$\in$	$\notin$
$\overline{A}$	$\notin$	$\in$

Esto significa que si x pertenece al conjunto A, no pertenece a su complemento y si pertenece al complemento de A, no pertenece al conjunto A.

La intersección y la unión entre los conjuntos A y B se pueden definir por medio de las siguientes tablas de pertenencia.

A	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
B	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$A \cap B$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Según la tabla anterior, $x \in (A \cap B)$ siempre y cuando $x \in A$ y $x \in B$ se cumplan. En cualquier otro caso, $x \notin (A \cap B)$.

A	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
B	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$A \cup B$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$

Según la tabla anterior, $x \notin (A \cup B)$ solamente cuando $x \notin A$ y $x \notin B$; en todos los otros casos, $x \in (A \cup B)$.

Las tablas de pertenencia sirven para determinar la igualdad entre conjuntos. Si los conjuntos F y G tienen la misma tabla de pertenencia, $F = G$.

Así, por ejemplo, podemos mostrar por medio de una tabla de pertenencia que $A \cup \overline{A} = R$.

A	$\in$	$\notin$
$\overline{A}$	$\notin$	$\in$
R	$\in$	$\in$
$A \cup \overline{A}$	$\in$	$\in$

En efecto, se observa que la tabla de pertenencia de $A \cup \overline{A}$ es la misma de R (siempre $\in$).

EJERCICIOS (14)

1) Haga una tabla de pertenencia para dos conjuntos P, Q, contenidos en un referencial K. Dibuje un diagrama de estos conjuntos y explique a qué región

del diagrama corresponde cada posibilidad de la tabla.

2) Haga una tabla de pertenencia para dos conjuntos P, Q y complétela para cada uno de los siguientes casos: a) $P \cap \overline{Q}$; b) $\overline{P} \cap Q$ c) $\overline{P} \cap \overline{Q}$.

Indicación: disponga las tablas como aparece a continuación.

a)

P				
Q				
$\overline{Q}$				
$P \cap \overline{Q}$				

3) Haga una tabla de pertenencia para cada uno de los siguientes casos: a) $P \cup \overline{Q}$; b) $\overline{P} \cup Q$; c) $\overline{P} \cup \overline{Q}$.

4) Muestre con tablas de pertenencia que se cumplen las siguientes igualdades: a) $\overline{\phi} = R$; b) $P \cup P = P$; c) $P \cap P = P$; d) $P \cap \overline{P} = \phi$; e) $P \cup R = R$; f) $P \cap R = P$; g) $P \cup \phi = P$.

SEGUNDA PARTE

Los números naturales

15. EL NUMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

Los conjuntos A, B, C, D de la figura 21 tienen el mismo número de elementos.

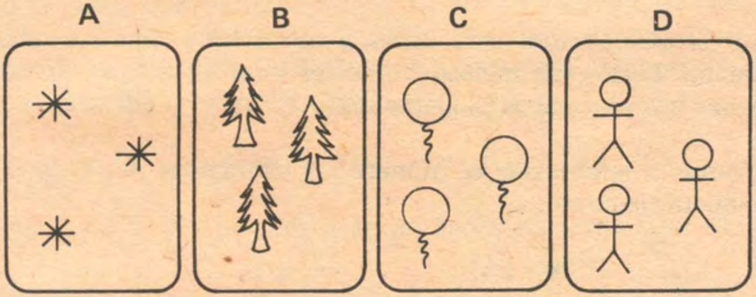


FIGURA 21

No es necesario saber contar para establecer que, por ejemplo A y B tienen el mismo número de elementos.

Basta establecer una correspondencia de uno a uno en ambos sentidos entre los elementos del conjunto A y los del conjunto B.

Esta correspondencia la podemos indicar con una flecha doble, como se ve en la figura 22.

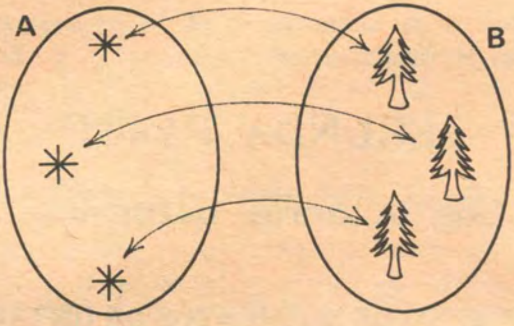


FIGURA 22

Se dice también que A tiene tantos elementos como B.

La propiedad que caracteriza a todos los conjuntos que tienen tantos elementos como el conjunto A es la de tener tres elementos (3 elementos).

Vamos a simbolizar el número de elementos de A de la manera siguiente:

$$\# \ (A)$$

que se lee: "número de elementos de A".

El símbolo "3" indica el número de elementos de A y de cualquier otro conjunto que se pueda poner en correspondencia con A.

Esta correspondencia debe ser de uno a uno y en ambos sentidos.

Podemos expresar entonces que

$$\# (A) = 3$$

Y por consiguiente también, que:

$$\# (A) = \# (B) = \# (C) = \# (D) = 3$$

En particular, tenemos que si $E = \{x\}$ entonces $\# (E) = 1$.

Si se trata del conjunto vacío, entonces

$$\# (\phi) = 0$$

O sea que el número de elementos de un conjunto unitario es uno (1) y el número de elementos del conjunto vacío es cero (0).

No se debe confundir el conjunto con el número de elementos del conjunto. En especial, no debe confundirse el cero con el conjunto vacío. El cero es el número de elementos del conjunto vacío.

Si $F = G$, entonces $\# (F) = \# (G)$.

Pero si $\# (P) = \# (Q)$, no necesariamente $P = Q$.

Ejemplo: $F = \{a, b, c, d\}$; $G = \{b, d, c, a\}$

Es claro que $F = G$ y por tanto, $\# (F) = \# (G)$; $\# (F) = 4$ y $\# (G) = 4$.

Veamos ahora: $P = \{u, t, v\}$, $Q = \{h, j, k\}$.

Es claro que $\# (P) = \# (Q)$, pues $\# (P) = 3$ y $\# (Q) = 3$.

Pero no es cierto que P = Q, porque los elementos de P no están en Q, ni los de Q en P.

EJERCICIOS (15)

1) Dibuje conjuntos como los de la figura 23 y trace flechas dobles para mostrar que tienen el mismo número de elementos.

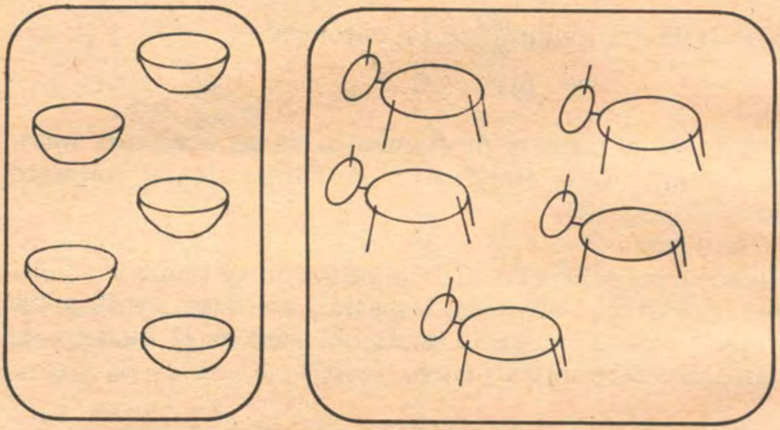


FIGURA 23

2) Dibuje dos conjuntos que no tengan el mismo número de elementos y muestre con flechas dobles por qué no tienen el mismo número de elementos.

3) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$, $C = \{a, e\}$, $D = \{b\}$, $E = D \cap C$, halle:

a) # (A); b) # (B); c) # (C); d) # (D); e) # E.

4) Con respecto a los conjuntos del ejercicio anterior, halle:

a) $\# (A \cap B)$; b) $\# (A \cup B)$; c) $\# (A \cap C)$; d) $\# (A \cup C)$; e) $\# (D \cup C)$

Nota: Recuérdese que $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$. Los elementos que son comunes a A y a B no se repiten al construir $A \cup B$.

16. LA REPRESENTACION DE LOS NUMEROS NATURALES

Los números naturales se representan por medio de los símbolos inventados por los hindúes y los árabes en la antigüedad.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Combinando estos diez símbolos se puede representar cualquier número natural.

El orden en que se combinen es esencial; así, 48 (cuarenta y ocho) es algo muy distinto de 84 (ochenta y cuatro).

Para entender cómo se simbolizan los número naturales, vamos a imaginar una sucesión de casillas como las de la figura 24, en las cuales vamos a introducir fichas o bolas.

FIGURA 24

En la figura 25 se muestra el número correspondiente a cada conjunto de fichas que se introducen en la primera casilla de la derecha,

Cuando tenemos diez fichas en la primera casilla de la derecha, entonces vaciamos esta casilla y colocamos una ficha en la casilla siguiente de la izquierda.

Tenemos así, una decena y cero unidades. Por esta razón escribimos 10 para representar el número diez. Véase figura 26.

La primera casilla de la derecha se llama casilla de las unidades. La que le sigue, a la izquierda, se llama casilla de las decenas. De esta manera continuamos introduciendo fichas en la primera casilla de la derecha.

Cuando volvamos a completar una decena, entonces la vaciamos e introducimos otra ficha en la casilla de las decenas.

Obtenemos así, dos decenas y cero unidades, por lo cual escribimos 20, que se lee veinte. Véase figura 27.

Continuamos introduciendo fichas en la casilla de las unidades y vamos produciendo así los números 21 (veintiuno), 22 (veintidós), 23 (veintitrés), 24 (veinticuatro), 25 veinticinco), 26 (veintiséis), 27) veintisiete, 28 (veintiocho), 29 (veintinueve).

Al introducir una ficha más en la primera casilla de las unidades, tenemos otra decena completa, por lo cual vaciamos esta casilla e introducimos otra ficha en la casilla de las decenas.

La situación queda como aparecen en la figura 28.

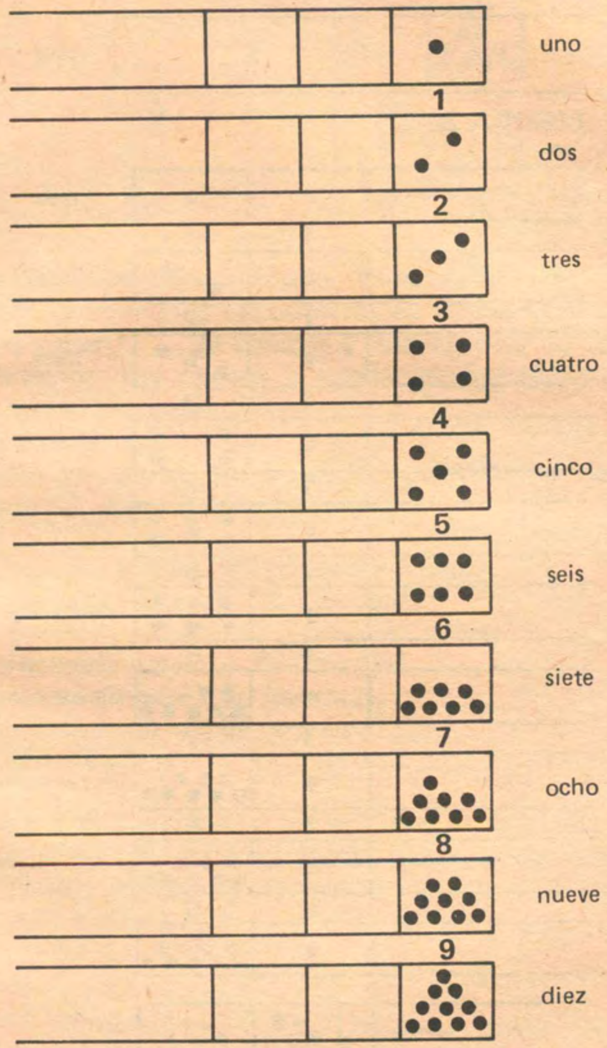

uno
1
dos
2
tres
3
cuatro
4
cinco
5
seis
6
siete
7
ocho
8
nueve
9
diez

FIGURA 25

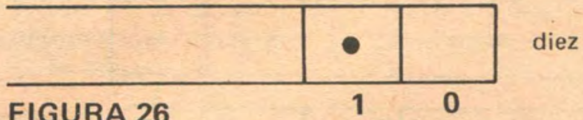


FIGURA 26

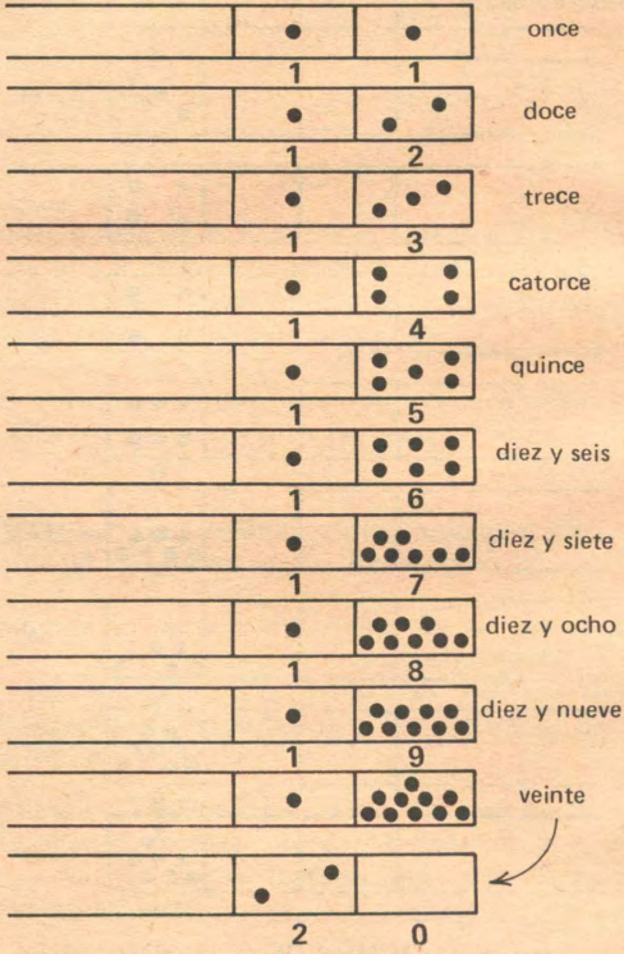


FIGURA 27

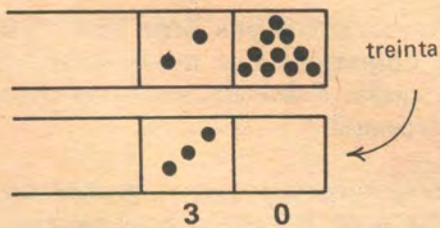


FIGURA 28

Si continuamos introduciendo fichas en la casilla de las unidades, producimos los números 31 (treinta y uno), 32 (treinta y dos), . . . 39 (treinta y nueve), después del cual completamos otra decena y producimos el número cuarenta, que se representa 40.

Tenemos ya cuatro fichas en la casilla de las decenas. Continuando este proceso, tenemos:

41 (cuarenta y uno), 42 (cuarenta y dos), . . .,
49 (cuarenta y nueve), 50 (cincuenta),
51 (cincuenta y uno), 52 (cincuenta y dos), . . . ,
59 (cincuenta y nueve), 60 (sesenta), . . . ,
69 (sesenta y nueve), 70 (setenta), . . . ,
79 (setenta y nueve), 80 (ochenta), . . . ,
89 (ochenta y nueve), 90 (noventa).

Al llegar a 90 tenemos ya nueve fichas en la casilla de las decenas. Seguimos introduciendo fichas en la casilla de las unidades. Al llegar a 99 (noventa y nueve) tenemos la situación de la figura 29.

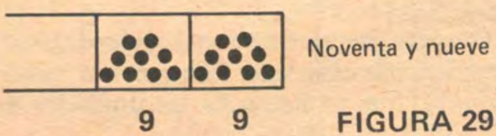


FIGURA 29

Si introducimos una ficha más en la casilla de las unidades, obtenemos una nueva decena, por lo cual vaciamos esta casilla e introducimos una ficha más en la casilla de las decenas.

Pero al hacer esto, completamos una decena en la casilla de las decenas, por lo cual vaciamos esta casilla e introducimos una ficha en la casilla siguiente de la izquierda, que se llama casilla de las centenas.

La situación queda como en la figura 30.

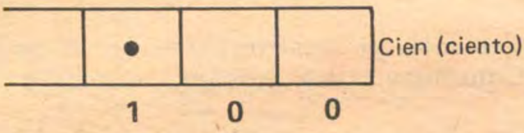


FIGURA 30

Tenemos una centena, cero decenas y cero unidades, lo que se lee cien o ciento.

Se continúan introduciendo fichas en la casilla de las unidades, con lo cual se producen los números 101 (ciento uno), 102 (ciento dos), etc.

Cada vez que en una casilla se complete una decena, se vaciará dicha casilla y se colocará una ficha en la casilla siguiente de la izquierda.

Así, cuando completemos una decena en la casilla de las centenas (tercera de derecha a izquierda), se vaciará la casilla y se introducirá una ficha en la casilla siguiente de la izquierda, que se llama de las unidades de mil. Véase la figura 31.

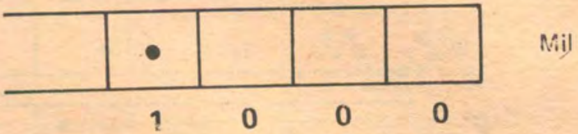


FIGURA 31

Así que la expresión 1.000, que se lee "mil", significa: una unidad de mil, cero centenas, cero decenas, cero unidades.

Si en las casillas tenemos una situación como la de la figura 32.

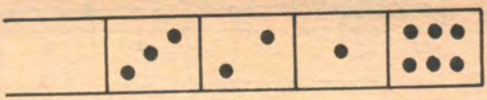


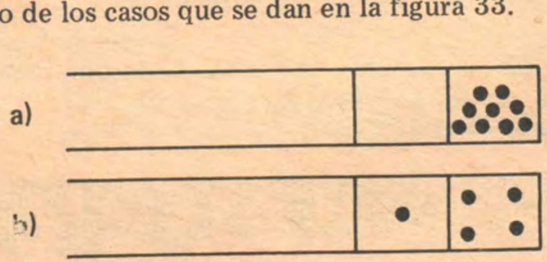
FIGURA 32

el número correspondiente es 3.216, que se lee: "tres mil doscientos dieciséis" y significa: tres unidades de mil, dos centenas, una decena y seis unidades.

EJERCICIOS (16)

1) ¿Cuáles son los símbolos que se usan para expresar cualquier número natural?

2) Escriba el número natural correspondiente a cada uno de los casos que se dan en la figura 33.



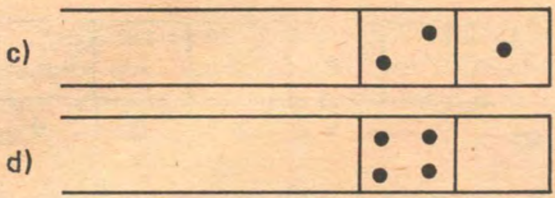


FIGURA 33

3) Escriba el número natural correspondiente a cada uno de los casos de la figura 34.

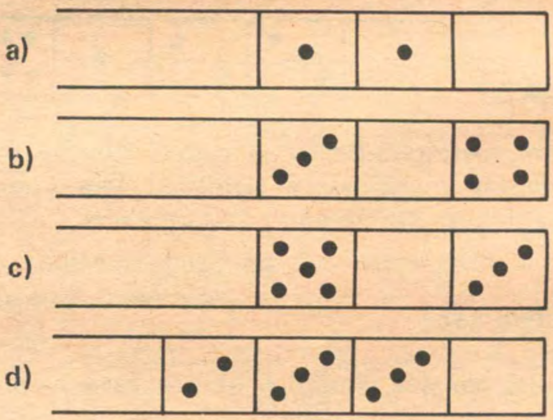


FIGURA 34

4) Dibuje el esquema de casillas correspondiente a cada una de las expresiones siguientes: a) 3.405; b) 2.809; c) 6.742; d) 1.350.

5) Dibuje el esquema que se obtiene si se agrega una ficha más en la casilla de las unidades (figura 35).

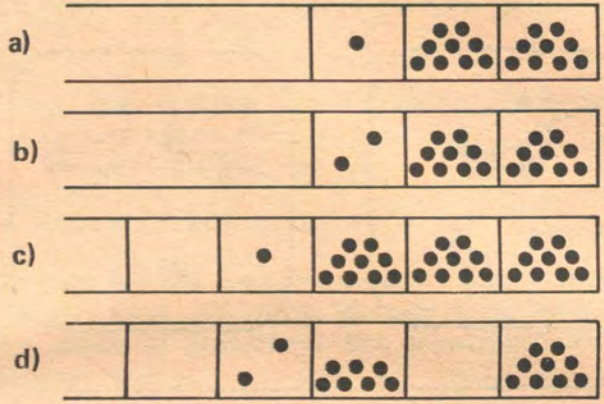


FIGURA 35

6) Escriba el significado de las expresiones siguientes, como en el ejemplo que se da a continuación: 6.403 significa, 6 unidades de mil, 4 centenas, 0 decenas, 3 unidades.

a) 4.832; b) 7.491; c) 1.034; d) 3.860.

7) Exprese el número natural correspondiente a los siguientes casos:

a) 3 decenas, 4 unidades; b) 8 decenas, 5 unidades; c) 7 decenas, 0 unidades; d) 5 centenas, 0 decenas, 8 unidades; e) 4 unidades de mil, 0 centenas, 1 decena, 3 unidades.

17. LA ADICION ENTRE NUMEROS NATURALES

Un problema sencillo que conduce a adición es el siguiente: en un corral hay 2 vacas y 3 terneros. ¿Cuántos animales hay? (Figura 36).

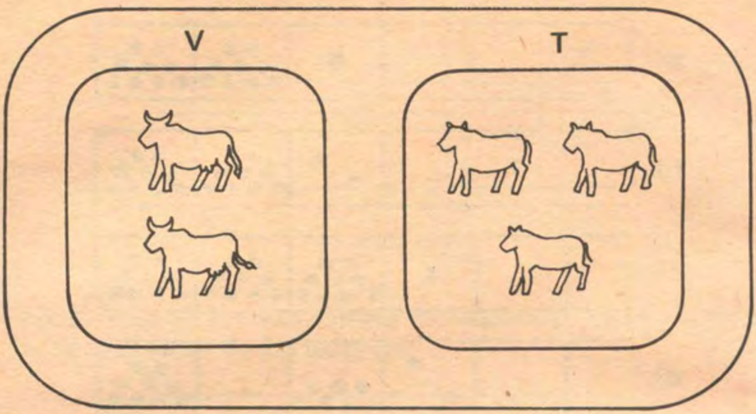


FIGURA 36

El problema es muy fácil de solucionar, pero vamos a observar algunas cosas que serán de utilidad para entender en qué consiste la adición entre números naturales.

Observamos, en primer lugar que V, T, son conjuntos que no tienen elementos en común, o sea que

$$V \cap T = \phi$$

Por otra parte, $\# (V) = 2, \# (T) = 3$

Lo que pregunta el problema se puede plantear en términos de conjuntos así: ¿Cuántos elementos hay en $V \cup T$? o sea,

$$\# (V \cup T) = ?$$

Observamos que $V \cup T$ tiene 5 elementos, o sea que

$$\# (V \cup T) = 5$$

Tenemos entonces que a los números 2 y 3 que expresan cuantos elementos tiene cada uno de los conjuntos V, T, le corresponde el número 5, que expresa cuantos elementos tiene $V \cup T$.

El número 5 es la suma de los números 2 y 3. Se puede escribir, entonces, que

$$2 + 3 = 5$$

lo que se lee: "2 más 3 es igual a 5".

Es indispensable que los conjuntos cuyos números de elementos se suman, no tengan elementos en común, pues de otro modo se presentaría una situación como la del siguiente ejemplo:

$$A = \{a, b\} \; ; \; B = \{b, c, d\} \; ;$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d\}$$

Tenemos aquí, que $\#(A) = 2$; $\#(B) = 3$;

$$\#(A \cup B) = 4$$

Véase figura 37.

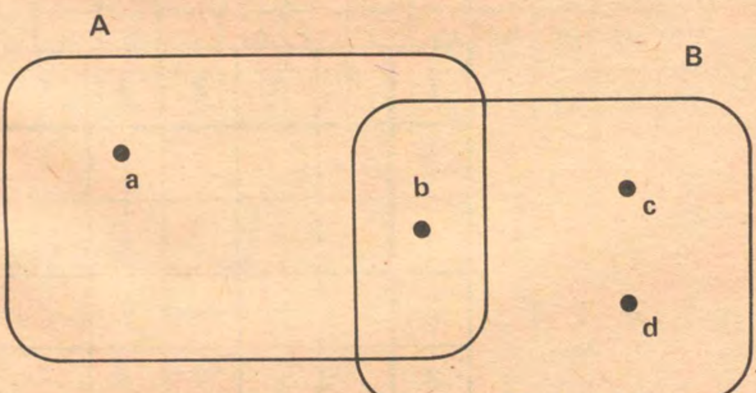


FIGURA 37

Es claro que si M es cualquier conjunto que tenga 2 elementos y N es cualquier conjunto que tenga 3 elementos y los conjuntos M, N no tienen elementos en común, entonces $M \cup N$ tiene 5 elementos.

Esto lo podemos expresar en símbolos así:

$$\text{Si } \#(M) = 2 \text{ y } \#(N) = 3$$
$$\text{y si } M \cap N = \phi$$
$$\text{entonces, } \#(M \cup N) = 5$$

Cuando decimos que $2 + 3 = 5$, estamos expresando precisamente lo anterior.

Conviene conocer los resultados básicos con los cuales se puede efectuar cualquier adición. Estos resultados se pueden hallar experimentalmente, como hicimos con el caso $2 + 3 = 5$.

Los resultados se consignan en una tabla como la de la figura 38.

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2				5	
3					

FIGURA 38

En esta tabla hemos consignado 2 + 3 = 5. El resultado, 5, se coloca en la intersección de la fila del 2 con la columna del 3. La tabla completamente llena aparece en la figura 39.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

FIGURA 39

EJERCICIOS (17)

1) Si $\#(P) = 4$ y $\#(Q) = 7$, y $P \cap Q = \phi$ ¿Cuál es $\#(P \cup Q)$?

Haga un dibujo explicativo.

2) Si $\#(F) = 5$ y $\#(G) = 3$ y $F \cap G \neq \phi$ ¿Cuál puede ser $\#(F \cup G)$?

Haga dibujos explicativos.

3) ¿Cuál es la adición correspondiente al caso del ejercicio 1?

4) Llene la tabla que aparece a continuación:

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

5) Halle en la tabla los resultados de las adiciones siguientes:

a) $3 + 8$; b) $5 + 7$; c) $8 + 4$; d) $7 + 2$; e) $9 + 9$; f) $8 + 7$; g) $7 + 6$; h) $6 + 9$; i) $4 + 9$; j) $8 + 6$.

6) Un señor compra 7 vacas y 9 caballos. ¿Cuántos animales compró?

7) De una vaca se obtuvieron 7 litros de leche y de otra 5 litros. ¿Cuántos litros de leche se obtuvieron en total?

8) Una parcela produjo 8 cargas de trigo y la parcela vecina produjo 9 cargas. ¿Cuántas cargas de trigo produjeron entre ambas?

18. PRACTICA DE LA ADICION

En la tabla de adición observamos que por ejemplo, $2 + 3 = 5$, y $3 + 2 = 5$, o sea que $2 + 3 = 3 + 2$.

Del mismo modo se observa que si se efectúa $5 + 8$ se obtiene el mismo resultado que cuando se efectúa $8 + 5$, o sea que $5 + 8 = 8 + 5$; también, $6 + 4 = 4 + 6$, etc.

O sea que el orden de los sumandos no altera la suma.

Esta propiedad de la adición se llama CONMUTATIVA y se puede enunciar también así: si a, b son números naturales cualesquiera, entonces $a + b = b + a$.

La propiedad conmutativa de la adición entre números naturales tiene su correspondiente en la unión entre conjuntos.

Si A, B son conjuntos, se verifica que
$A \cup B = B \cup A$.

Los sumandos son los números con los cuales se efectúa la adición.

La suma es el resultado de la adición.

Podemos observar también en la tabla que cualquier número sumado con cero da como resultado el mismo número. Por ejemplo, $2 + 0 = 2$; $0 + 8 = 8$; $9 + 0 = 9$; $0 + 7 = 7$, etc.

Esta propiedad de la adición se llama MODULATIVA.

El cero se llama módulo o elemento idéntico para la adición.

La propiedad correspondiente entre conjuntos es la siguiente:

Si A es un conjunto cualquiera,

$$A \cup \phi = A$$

$$\phi \cup A = A$$

O sea que el conjunto vacío actúa como elemento idéntico o módulo para la unión entre conjuntos.

Como se dijo antes, los resultados que aparecen en la tabla que hemos construido son los resultados básicos, los cuales conviene conocer de memoria para no tener que consultar en cada caso la tabla.

Los sumandos se pueden disponer verticalmente, o sea que en lugar de escribir, por ejemplo, $2 + 3 = 5$, escribimos.

$$\begin{array}{r} 2 \\ +\ 3 \\ \hline 5 \end{array}$$

La línea horizontal que se coloca debajo de los sumandos reemplaza al signo =.

La disposición vertical es ventajosa cuando se realizan adiciones más complicadas que las que aparecen en la tabla.

Así, por ejemplo, si queremos efectuar $12 + 25$, disponemos la operación así:

$$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 25 \\ \hline \end{array}$$

Ahora sumamos primero las unidades entre sí $(2 + 5 = 7)$ y luego las decenas entre sí $(1 + 2 = 3)$.

La operación completa queda entonces,

$$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 25 \\ \hline 37 \end{array}$$

Si queremos efectuar $18 + 34$, disponemos la operación como en el caso anterior y como en el caso anterior sumamos primero las unidades entre sí y luego las decenas entre sí.

Al sumar las unidades obtenemos $8 + 4 = 12$.

Como 12 es 1 decena más 2 unidades, escribimos las 2 unidades y llevamos la decena para sumarla con las otras decenas.

$$\begin{array}{r} \\ 18 \\ +\ 34 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ \ \\ 18 \\ +\ 34 \\ \hline 2 \end{array}$$

Tenemos que efectuar ahora $1 + 1 + 3$. Para hacerlo, efectuamos primero $1 + 1$ y al resultado se le suma 3.

$$1 + 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

La operación completa queda

$$\begin{array}{r} ① \\ 18 \\ + \ 34 \\ \hline 52 \end{array}$$

El número que aparece dentro del círculo se puede llevar mentalmente, sin necesidad de escribirlo.

Vamos a efectuar ahora $27 + 35 + 24$. La operación se dispone así:

$$\begin{array}{r} 27 \\ 35 \\ + \ 24 \\ \hline \end{array}$$

Como de costumbre, comenzamos sumando las unidades: $7 + 5 + 4$.

En la tabla encontramos que $7 + 5 = 12$ y queda por efectuar $12 + 4$; este resultado no lo encontramos en la tabla pero lo podemos efectuar fácilmente.

$$\begin{array}{r} 12 \\ + \ 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

Tenemos entonces que $7 + 5 + 4 = 16$

La operación queda así:

$$\begin{array}{r} ① \\ 27 \\ 35 \\ +\ 24 \\ \hline 86 \end{array}$$

La decena de 16 se suma con las otras decenas: $1 + 2 + 3 + 2$. Para hacer esta última adición, efectuamos $1 + 2$; este resultado lo sumamos con 3 y éste último con 2:

$1 + 2 + 3 + 2 = 3 + 3 + 2 =$
$6 + 2 = 8$

Al efectuar la adición como lo hemos venido haciendo, estamos usando la propiedad asociativa, combinada con la conmutativa de la adición.

La propiedad asociativa nos permite efectuar, por ejemplo, $3 + 4 + 2$, asociando como se quiera los sumandos:

$$3 + (4 + 2) = 3 + 6 = 9$$
$$(3 + 4) + 2 = 7 + 2 = 9$$

Por eso no es necesario escribir paréntesis para indicar una suma como la de este ejemplo, o una que tenga más sumandos.

Tampoco influye en el resultado el orden en que se escriban dichos sumandos.

Entre conjuntos se cumple la propiedad asociativa para la unión.

Ejemplo: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{d, e\}$; $C = \{f, g\}$

$(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, e\} \cup \{f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$A \cup (B \cup C) = \{a, b, c\} \cup \{d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

De modo que podemos escribir $A \cup B \cup C$ sin temor de equivocarnos al asociar de una manera o de otra.

Para efectuar $27 + 35 + 24$, descomponemos cada sumando en la suma de las decenas y las unidades:

$$(20 + 7) + (30 + 5) + (20 + 4)$$

Ahora ponemos juntas las decenas y juntas las unidades, conmutando y asociando de otra manera:

$(20 + 30 + 20) + (7 + 5 + 4) = 70 + 16$

$70 + 16 = 70 + (10 + 6)$
$70 + (10 + 6) = (70 + 10) + 6$
$(70 + 10) + 6 = 80 + 6 = 86$

Todo este proceso justifica la disposición vertical de los sumandos.

Se suma la columna de las unidades y luego la de las decenas.

Efectuemos ahora, $38 + 49 + 57$.

Como antes, sumamos primero las unidades:

$$8 + 9 + 7 = 17 + 7 = 24$$

Las 2 decenas de 24 las sumamos con las otras decenas:

$2 + 3 + 4 + 5 = 5 + 4 + 5 = 9 + 5 = 14$

La operación completa es como sigue:

$$\begin{array}{r} ② \\ 38 \\ 49 \\ +\ 57 \\ \hline 144 \end{array}$$

La suma de las decenas da 14. Como 14 decenas es igual a 10 decenas más 4 decenas y las 10 decenas forman una centena, las 14 decenas se expresan como 1 centena más 4 decenas.

EJERCICIOS (18)

1) Efectúe las siguientes adiciones, disponiendo los sumandos en forma vertical: a) $3 + 6$; b) $8 + 4$; c) $2 + 9$; d) $8 + 7$.

2) Efectúe las siguientes adiciones disponiendo los sumandos en forma vertical: a) $3 + 4 + 9$; b) $8 + 5 + 2$; c) $6 + 3 + 2$; d) $5 + 2 + 6$.

3) Lo mismo para los siguientes casos: a) $24 + 13$; b) $58 + 21$; c) $36 + 42$; d) $57 + 41$.

4) Lo mismo para los siguientes casos: a) $36 + 48$; b) $19 + 32$; c) $75 + 16$; d) $34 + 28$.

5) Lo mismo para los siguientes: a) 23 + 34 + 21; b) 53 + 29 + 18; c) 57 + 24 + 31; d) 61 + 43 + 88.

6) Efectúe las siguientes adiciones, disponiendo los sumandos en forma vertical: a) 324 + 123; b) 161 + 34; c) 208 + 39; d) 650 + 94; e) 542 + 8; f) 523 + 17.

7) Una persona compra arroz por valor de 358 pesos y carne por valor de 519 pesos ¿Cuánto dinero gastó?

8) Un bus transportó 319 pasajeros en el primer viaje, 217 en el segundo y 414 en el tercero. ¿Cuántos pasajeros transportó en los tres viajes?

9) ¿Cuántas decenas hay en 48 unidades?

10) ¿Cuántas centenas hay en 304 unidades?

19. ESCRITURA DE LOS NUMEROS NATURALES

Ya hemos visto cómo 384, por ejemplo, significa: 3 centenas, más 8 decenas, más 4 unidades.

Cuando el número tiene más de tres cifras, se separan las cifras en períodos de tres cifras, de derecha a izquierda, con el objeto de facilitar su lectura.

Así por ejemplo, 3802459 se separa de la siguiente forma:

3.802.459

Esto significa, de derecha a izquierda:

9 unidades
5 decenas

4 centenas
2 unidades de mil
0 decenas de mil
8 centenas de mil
3 unidades de millón.

Se lee: 3 millones, ochocientos dos mil, cuatrocientos cincuenta y nueve.

Vamos a dar otros ejemplos de lectura y escritura de números naturales de varias cifras.

a) 425.308 se lee: cuatrocientos veinticinco mil, trescientos ocho.

b) 15.000 se lee: quince mil.

c) 38.002 se lee: treinta y ocho mil dos.

d) 2.503.010 se lee: dos millones quinientos tres mil diez.

e) 405.129.804 se lee: cuatrocientos cinco millones, ciento veintinueve mil, ochocientos cuatro.

EJERCICIOS (19)

1) Escriba el significado, en términos de unidades, decenas, etc., en los siguientes casos:

   a) 3.402; b) 538; c) 104.583; d) 2.305.104.

2) Lea y escriba con letras los siguientes números: a) 352; b) 8.421; c) 82.103; d) 67.400; e) 31.467.809; f) 504.671.001.

3) Escriba en números: a) doscientos siete; b) quinientos cuatro mil setecientos ochenta y tres; c) setenta y dos millones quinientos treinta y dos mil cuatrocientos siete; d) cuatrocientos treinta y dos millones, veinticuatro.

20. LA SUSTRACCION

La sustracción nos permite solucionar problemas como el siguiente: Un niño que tenía 5 manzanas se comió 2; ¿Cuántas le quedaron?

La situación se puede representar gráficamente como aparece en la figura 40.

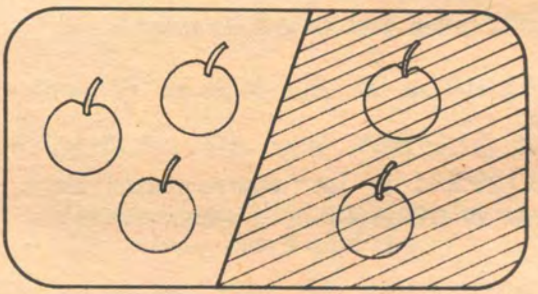


FIGURA 40

La región rayada en la figura corresponde al complemento del conjunto de las manzanas que quedan cuando el niño se come 2 manzanas. El conjunto que queda tiene 3 manzanas. Se escribe entonces que

$$5 - 2 = 3$$

lo cual se lee: "5 menos 2 es igual a 3".

También podría haberse planteado el problema en los siguientes términos: Si un niño tenía 5 manzanas y le quedan 3 ¿Cuántas se comió?

La respuesta se obtiene efectuando la sustracción

$$5 - 3 = 2$$

Este ejemplo nos muestra que para cada adición que se plantee hay dos sustracciones posibles:

$$2 + 3 = 5 \begin{cases} 5 - 3 = 2 \\ 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

También se observa que si uno conoce la adición, resulta fácil efectuar la sustracción.

Así, para efectuar $9 - 3$, debemos buscar el número que sumado con 3 (el sustraendo) da como resultado 9 (el minuendo).

Sabemos que $6 + 3 = 9$, así que $9 - 3 = 6$.

Podemos utilizar la tabla de adición para hallar el resultado de una sustracción.

Así, por ejemplo, para hallar $12 - 8$, buscamos en la línea del 8 hasta encontrar el 12 y luego leemos sobre la otra línea el número que sumado con 8 da 12, o sea 4.

Véase figura 41.

Una propiedad importante de la adición entre números naturales es la llamada CLAUSURATIVA.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8					12			

FIGURA 41

Esta propiedad se enuncia así: la suma de dos números naturales cualesquiera, es un número natural.

O sea que si a, b representan números naturales cualesquiera, a + b es un número natural.

Hemos esperado hasta ahora para mencionar esta propiedad, pues, por contraste, no se cumple para la sustracción.

No siempre la diferencia entre dos números naturales es un número natural.

Por ejemplo, 5 − 8 no es un número natural, aunque 8 − 5 sí lo es; 8 − 5 = 3.

En un caso como el siguiente no se encuentra el resultado en la tabla: $28 - 13$.

Pero se hace de manera parecida a como realizamos la adición: primero restamos las unidades entre sí y luego las decenas entre sí.

La operación se dispone en forma vertical así:

$$\begin{array}{r} 28 \\ -\ 13 \\ \hline \end{array}$$

Hallamos que $8 - 3 = 5$ y que $2 - 1 = 1$.

Así que

$$\begin{array}{r} 28 \\ -\ 13 \\ \hline 15 \end{array}$$

o sea, $28 - 13 = 15$.

El número que hemos obtenido es el que sumado con 13 da como resultado 28. En efecto,

$$\begin{array}{r} 13 \\ +\ 15 \\ \hline 28 \end{array}$$

Veamos ahora el caso siguiente:

$$\begin{array}{r} 35 \\ -\ 17 \\ \hline \end{array}$$

Si tratamos de efectuar la sustracción entre las unidades, observamos que no es posible efectuar $5 - 7$, porque no hay número que sumado con 7 dé como resultado 5.

Pero sí hay un número que sumado con 7 da como resultado 15: es 8. Entonces, en lugar de efectuar 5 — 7, que no es posible, efectuamos 15 — 7 que sí lo es.

Pero para ello debemos tomar "prestada" una, de las 3 decenas de 35.

Al continuar la operación en la columna de las decenas, no diremos 3 — 1 sino 2 — 1, porque una de las 3 decenas ya fue usada al efectuar 15 — 7.

La operación completa queda, entonces,

$$\begin{array}{r} ① \\ 35 \\ -\ 17 \\ \hline 18 \end{array}$$

O sea que 35 — 17 = 18.

El número que aparece dentro del círculo corresponde a la decena que se "prestó" a las unidades para poder efectuar la operación.

El número obtenido, 18, es el que sumado con 17 (sustraendo) da como resultado 35 (minuendo). En efecto,

$$\begin{array}{r} ① \\ 17 \\ +\ 18 \\ \hline 35 \end{array}$$

El resultado de una sustracción se llama diferencia entre el minuendo y el sustraendo.

Efectuemos ahora, 835 — 596.

$$\begin{array}{r} 835 \\ -\ 596 \\ \hline \end{array}$$

Como 5 — 6 no se puede efectuar, tomamos una de las 3 decenas y decimos 15 — 6 = 9.

Al pasar al puesto de las decenas, decimos 2 — 9, que no se puede efectuar; entonces tomamos una de las 8 centenas y decimos :

$$12 - 9 = 3.$$

Al pasar al puesto de las centenas decimos, 7 — 5 = 2.

La operación completa queda,

$$\begin{array}{r} 1\,1\ \ \\ 8\ 3\ 5 \\ -\ 5\ 9\ 6 \\ \hline 2\ 3\ 9 \end{array}$$

Tenemos pues, que 835 — 596 = 239.

Comprobamos que este resultado es correcto, por medio de la adición, ya que la diferencia, 239, debe ser el número que sumado con el sustraendo, da como resultado el minuendo.

$$\begin{array}{r} 1\,1\ \ \\ 2\ 3\ 9 \\ +\ 5\ 9\ 6 \\ \hline 8\ 3\ 5 \end{array}$$

Como vimos antes, a partir de una adición se pueden realizar dos sustracciones.

Entonces, a partir de $239 + 596 = 835$ obtenemos que $835 - 596 = 239$ (que ya la hemos efectuado) y que $835 - 239 = 596$.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & \\ & 8 & 3 & 5 \\ - & 2 & 3 & 9 \\ \hline & 5 & 9 & 6 \end{array}$$

Con la sustracción pasa algo que no pasaba con la adición. La adición entre números naturales se puede efectuar siempre.

La sustracción entre dos números naturales no se puede efectuar siempre.

Así, por ejemplo, si se da el problema: una persona recoge 4 piñas y de estas regala 7; ¿cuántas le quedan?

Es claro que no puede regalar más piñas que las que tiene, o sea que no se puede efectuar $4 - 7$ y el problema propuesto no tiene solución en el conjunto de los números naturales.

Como se trata de efectuar $4 - 7$, no hay de dónde tomar "prestada" una decena para decir $14 - 7$, lo que sí podemos hacer en un caso como el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 2 & 4 \\ - & 1 & 7 \\ \hline & 0 & 7 \end{array}$$

Al tratar de efectuar la resta en la columna de las unidades hemos tomado "prestada" una de las dos decenas y decimos, 14 − 7 = 7. Entonces en la columna de las decenas queda una sola y tenemos,

$$1 - 1 = 0$$

El resultado, o sea la diferencia, aparece 07 que significa: 0 decenas y 7 unidades, que es lo mismo que 7 unidades.

Los ceros que aparezcan a la izquierda de un número diferente de cero, se pueden quitar sin que se altere su valor.

Así, por ejemplo, 003 significa lo mismo que 3, pues quiere decir que hay cero centenas y cero decenas.

Sin embargo, el cero de 403 no se puede suprimir, porque a la izquierda de él hay una cifra diferente de cero.

Cuando se disponen en forma vertical los sumandos o los números que se van a restar, deben aparecer las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc.

Ejemplos: 4.372 + 28 + 104 + 9 aparece en forma vertical, así:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,2} \\ 4\,3\,7\,2 \\ 2\,8 \\ 1\,0\,4 \\ 9 \\ \hline 4\,5\,1\,3 \end{array}$$

3.804 − 56 se dispone así:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle ①①} \\ 3\,8\,0\,4 \\ -\quad 5\,6 \\ \hline 3\,7\,4\,8 \end{array}$$

Si se quiere, se pueden completar con ceros los puestos que quedan vacíos:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle ①②} \\ 4\,3\,7\,2 \\ 0\,0\,2\,8 \\ 0\,1\,0\,4 \\ +\ 0\,0\,0\,9 \\ \hline 4\,5\,1\,3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle ①①} \\ 3\,8\,0\,4 \\ -\ 0\,0\,5\,6 \\ \hline 3\,7\,4\,8 \end{array}$$

La propiedad asociativa no se cumple para la sustracción entre números naturales.

Por ejemplo, $8 - (4 - 1) = 8 - 3 = 5.$

$(8 - 4) - 1 = 4 - 1 = 3.$

Cuando se escriba $8 - 4 - 1$ se entenderá que primero se efectúa $8 - 4$ y al resultado se le resta 1.

La forma vertical de realizar la resta se puede justificar con el siguiente ejemplo:

$25 - 12 = (20 + 5) - (10 + 2)$

Se restan las unidades entre sí y las decenas entre sí.

$(20 + 5) - (10 + 2) = (20 - 10) + (5 - 2)$

$(20 - 10) + (5 - 2) = 10 + 3 = 13.$

En el caso de "prestar", se procede como en el siguiente ejemplo:

$$37 - 18 = (30 + 7) - (10 + 8)$$

$$(30 + 7) - (10 + 8) = (20 + 10 + 7) - (10 + 8)$$

$$(20 + 10 + 7) - (10 + 8) = (20 - 10) + (17 - 8)$$

$$(20 - 10) + (17 - 8) = 10 + 9 = 19$$

En general, si se tiene $(a + b) - (c + d)$ se puede escribir $(a - c) + (b - d)$, siempre y cuando $a - c$ sea un número natural y $b - d$ también.

EJERCICIOS (20)

1) Efectúe las siguientes sustracciones: a) $9 - 5$; b) $8 - 3$; c) $7 - 1$; d) $6 - 0$; e) $3 - 3$. Usando adición, compruebe que los resultados obtenidos son correctos.

2) Escriba el resultado de cada una de las siguientes adiciones y escriba las dos sustracciones correspondientes, con su resultado.

   a) $3 + 4$; b) $8 + 5$; c) $9 + 7$; d) $8 + 6$; e) $7 + 6$; f) $12 + 8$; g) $23 + 45$.

3) Efectúe cada una de las sustracciones siguientes y verifique, por medio de la adición, que el resultado obtenido es correcto.

   a) $38 - 29$; b) $534 - 248$; c) $672 - 91$; d) $5.384 - 2.095$; e) $6.308.521 - 983.521$.

4) Una señora sale al mercado con 500 pesos. Gasta 75 pesos en arroz, 123 pesos en carne, 29 pesos en verduras, 88 pesos en frutas y 9 pesos en condimentos. ¿Le sobró dinero? ¿Cuánto?

5) ¿Cuántos años cumplió en 1978 una persona que nació en 1943?

6) Un camión recorrió el lunes 320 kilómetros; el martes 180 kilómetros y el miércoles 63 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a su destino, si el recorrido total es de 1.304 kilómetros?

21. EL ORDEN ENTRE LOS NUMEROS NATURALES

¿Cómo saber si un conjunto tiene más elementos que otro?

Consideremos, por ejemplo, el conjunto A = {a, b, c} y el conjunto B = {f, g, h, j, t} . Ver figura 42.

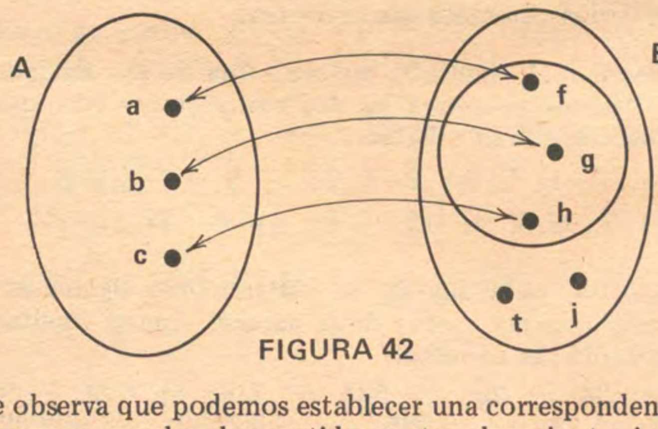


FIGURA 42

Se observa que podemos establecer una correspondencia de uno a uno en los dos sentidos, entre el conjunto A y una parte del conjunto B. Decimos entonces que B tiene más elementos que A, o que el número de elementos de B es mayor que el número de elementos de A.

Esto último se expresa simbólicamente así:

$$\# (B) > \# (A)$$

En el ejemplo, $\# (B) = 5$; $\# (A) = 3$.

Podemos decir entonces que $5 > 3$. Lo anterior se lee: "5 es mayor que 3".

Para poder efectuar la sustracción entre números naturales, se necesita que el minuendo sea mayor que el sustraendo.

Más exactamente, se necesita que el sustraendo no sea mayor que el minuendo. Porque el minuendo puede ser igual al sustraendo, en cuyo caso la diferencia es cero.

Ejemplos: $5 - 5 = 0$; $12 - 12 = 0$

Lo que no se puede efectuar es, por ejemplo, $8 - 9$ porque $9 > 8$.

La sucesión natural de los números es:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$$

Si un número está después de otro, es mayor que este. Por ejemplo, $4 > 1$, porque 4 está después de 1 en la sucesión que mencionamos anteriormente.

Vamos a fijar criterios para saber cuándo un número es mayor que otro.

Si dos números tienen varias cifras y están escritos sin ceros innecesarios a la izquierda, entonces es mayor aquel que tenga más cifras.

Así, por ejemplo, $234 > 59$; $1.804 > 395$; $47.831 > 9.000$.

Si los números tienen igual número de cifras, entonces nos fijamos en la primera cifra de la izquierda.

Ejemplos: $348 > 295$, porque $3 > 2$;
$6.794 > 4.899$, porque $6 > 4$.

Si los números tienen igual número de cifras y la primera cifra de la izquierda es igual, entonces nos fijamos en la segunda cifra.

Ejemplos: $749 > 738$; $8.536 > 8.499$

Si los números tienen igual número de cifras y las dos primeras cifras de la izquierda son respectivamente iguales, entonces nos fijamos en la tercera cifra. Si esta es igual, nos fijamos en la cuarta. Así sucesivamente.

Ejemplos: $4.784 > 4.759$; $34.209 > 34.199$;
$3.652.835 > 3.652.749$

En lugar de decir que, por ejemplo, $34 > 29$ (34 es mayor que 29) se dice que 29 es menor que 34 y se escribe:

$$29 < 34$$

El símbolo $<$ se lee "menor". El símbolo $>$ se lee "mayor".

Para no confundirlos, recuérdese que la parte ancha del símbolo está cerca del número mayor y la parte aguda está cerca del menor.

EJERCICIOS (21)

1) Establezca cuál de los dos números es el mayor entre 4 y 7, valiéndose de una representación gráfica con conjuntos.

2) Establezca cuál de los dos números es mayor que el otro y expréselo simbólicamente: a) 7 y 9; b) 14 y 31; c) 47 y 29; d) 345 y 702; e) 1.538 y 6.959; f) 82.507 y 75.619.

3) Lo mismo del ejercicio anterior para los siguientes:
a) 4.734 y 4.629; b) 38.421 y 38.394; c) 734.931 y 734.098; d) 3.452.805 y 3.452.809

4) Escriba en dos formas equivalentes cada una de las desigualdades de los ejercicios anteriores, usando los símbolos $>$ y $<$.

5) Efectué las sustracciones posibles entre las parejas de números dados en los ejercicios anteriores y verifique por medio de la adición que los resultados obtenidos son correctos.

22. LA MULTIPLICACION ENTRE NUMEROS NATURALES

Un problema típico de multiplicación es el siguiente: hay tres cajas, en cada una de las cuales hay dos manzanas. ¿Cuántas manzanas hay por todas? (Ver figura 43).

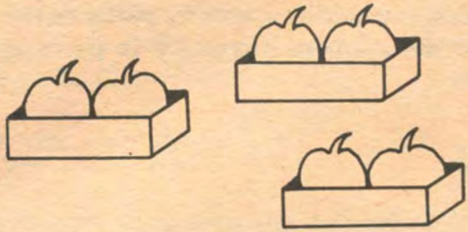


FIGURA 43

Este problema se puede resolver usando adición:

$$2 + 2 + 2 = 6.$$

Pero observando que se ha tomado 3 veces el número 2 como sumando, se dice también que 3 veces 2 es igual a 6 y se escribe

$$3 \times 2 = 6$$

De la misma manera se pueden obtener otros resultados. Por ejemplo, 2×8; $2 \times 8 = 8 + 8 = 16$, o sea que $2 \times 8 = 16$ (2 veces 8 es igual a 16).

Lo mismo que en la adición, vamos a construir también para la multiplicación una tabla con los resultados básicos (Ver figura 44). El producto de dos números naturales es siempre un número natural.

Esta es la propiedad CLAUSURATIVA de la multiplicación entre números naturales.

Estos resultados básicos deben memorizarse, para no tener que buscar en la tabla cada vez.

En esta tabla leemos, por ejemplo, que

$8 \times 3 = 24$ $6 \times 8 = 48$ $9 \times 9 = 81$
$4 \times 2 = 8$ $9 \times 6 = 54$ $7 \times 4 = 28.$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

FIGURA 44

También observamos que todo número multiplicado por cero da como resultado cero.

Esta propiedad del cero se llama anulativa. Se dice que el cero es elemento absorbente para la multiplicación.

Entre conjuntos la absorbencia se presenta con el conjunto vacío para la intersección.

Si A es un conjunto cualquiera, $A \cap \phi = \phi$

El conjunto referencial es absorbente para la unión:

$$A \cup R = R,$$

cualquiera sea el conjunto A.

Por ejemplo:

$0 \times 3 = 0; \; 3 \times 0 = 0; \; 2 \times 0 = 0.$

Cuando escribimos, por ejemplo, $3 \times 9 = 27$, 3 y 9 se llaman factores y 27 se llama el producto.

Observamos también en la tabla, que el orden de los factores no altera el producto (Propiedad CONMUTATIVA de la multiplicación).

Así, por ejemplo:

$3 \times 9 = 27$ y $9 \times 3 = 27$, o sea que $3 \times 9 = 9 \times 3$.

De la misma manera se verifica que $8 \times 7 = 7 \times 8$; $3 \times 6 = 6 \times 3$; $5 \times 4 = 4 \times 5$.

Otra cosa que podemos observar en la tabla es que cualquier número multiplicado por 1 da como resultado el mismo número.

Así, por ejemplo:

$3 \times 1 = 3; \; 8 \times 1 = 8; \; 1 \times 9 = 9; \; 6 \times 1 = 6.$

Se dice por tanto que 1 es el elemento idéntico o módulo para la multiplicación. Esta tabla no nos da todos los productos posibles, pero sí permite calcularlos.

Para esto, necesitamos darnos cuenta primero de lo que significa multiplicar por diez. Por ejemplo, 3×10 se puede calcular usando adición:

$$
\begin{array}{r}
10 \\
10 \\
+\ 10 \\
\hline
30
\end{array}
$$

O sea que $3 \times 10 = 30$

Como el orden de los factores no altera el producto, podemos decir también que $10 \times 3 = 30$.

De la misma manera se puede obtener: $4 \times 10 = 40$; $6 \times 10 = 60$; $8 \times 10 = 80$, etc.

Podemos dar una regla general para multiplicar un número por diez: basta agregar un cero a la derecha del número.

Esta regla es aplicable para números de dos o más cifras. Por ejemplo, $32 \times 10 = 320$; $485 \times 10 = 4.850$; $32.000 \times 10 = 320.000$.

Si queremos efectuar, por ejemplo, 3×12, podemos recurrir a la adición:

$$
\begin{array}{r}
12 \\
12 \\
+\ 12 \\
\hline
36
\end{array}
$$

Al hacerlo, estamos sumando primero las unidades: $2 + 2 + 2$, o sea, estamos efectuando, 3×2.

Luego, sumamos las decenas: $1 + 1 + 1$, o sea, 3×1. Como una decena tiene diez unidades, estamos efectuando en realidad $10 + 10 + 10$, o sea 3×10.

De modo que 3×12 se puede expresar como $3 \times (2 + 10)$ y esto es igual a 3×2 más 3×10.

$$3 \times (2 + 10) = (3 \times 2) + (3 \times 10).$$

Esta es la propiedad DISTRIBUTIVA de la multiplicación con respecto a la adición.

Se enuncia en general, para a, b, c, números naturales cualesquiera:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Basados en esto, podemos disponer en forma vertical la multiplicación 3×12. (Colocamos el número mayor primero).

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Multiplicamos primero 3 por las unidades (2) y luego por las decenas (1). Como $3 \times 2 = 6$ y $3 \times 1 = 3$, escribimos:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

Efectuemos ahora 12×8. Al disponer en forma vertical la operación, efectuamos primero la multiplicación de 8 por las unidades: $8 \times 2 = 16$. Luego, multiplicamos 8 por las decenas y sumamos:

$$\begin{array}{rcc} & 1 & 2 \\ \times & & 8 \\ \hline & 1 & 6 \\ + & 8 & \\ \hline & 9 & 6 \end{array}$$

Podemos simplificar esto, sumando la decena de 16 con las decenas que resultan de multiplicar a 8 por la decena de 12.

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ & 1\,2 \\ \times & 8 \\ \hline & 9\,6 \end{array}$$

Decimos entonces: 8 x 2 = 16; escribo 6 y llevo 1 decena; 8 x 1 = 8, más una decena que llevaba, 9.

Vamos a efectuar ahora 23 x 34. Comenzamos por multiplicar 23 x 4, de la manera conocida.

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ & 2\,3 \\ \times & 3\,4 \\ \hline & 9\,2 \end{array}$$

Ahora multiplicamos las 3 decenas por 23, pero teniendo en cuenta de colocar el resultado comenzando con la cifra de las decenas, o sea debajo del 9. Hecho esto, sumamos los resultados obtenidos.

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ & 2\,3 \\ \times & 3\,4 \\ \hline & 9\,2 \\ + & 6\,9 \\ \hline & 7\,8\,2 \end{array}$$

En resumen, 23 x 34 = 782

Veamos otro ejemplo, en el cual hay tres cifras en cada uno de los factores.

$$\begin{array}{r} 347 \\ \times\quad 283 \\ \hline 1041 \\ 2776 \\ +\ 694 \\ \hline 98201 \end{array}$$

Se dice: 3 x 7 = 21; se escribe 1 y se lleva mentalmente 2; 3 x 4 = 12 (más 2 que llevaba, 14). Se escribe 4 y se lleva 1; 3 x 3 = 9 (más 1 que llevaba, 10). Pasamos ahora a multiplicar por las 8 decenas y comenzamos a escribir a partir del puesto de las decenas (debajo del 4). Después multiplicamos por las 2 centenas y comenzamos a escribir el resultado debajo de las centenas (el primer 7). Finalmente sumamos los resultados parciales.

Veamos un ejemplo más: 3.423 x 108

$$\begin{array}{r} 3423 \\ \times\quad 108 \\ \hline 27384 \\ 0000 \\ +\ 3423 \\ \hline 369684 \end{array}$$

Se puede simplificar un poco al multiplicar por cero:

$$\begin{array}{r} 3423 \\ \times\quad 108 \\ \hline 27384 \\ +\ 34230 \\ \hline 369684 \end{array}$$

EJERCICIOS (22)

1) Halle los siguientes resultados, usando la tabla: a) 3 x 8; b) 5 x 6; c) 7 x 9; d) 8 x 4; e) 5 x 9; f) 7 x 8; g) 6 x 6; h) 5 x 0; i) 1 x 3; j) 8 x 0.

2) Efectúe las multiplicaciones siguientes, disponiendo la operación en forma vertical: a) 3 x 13; b) 4 x 12; c) 7 x 11; d) 2 x 233; e) 3 x 12.304.

3) Efectúe las siguientes: a) 3 x 28; b) 7 x 39; c) 17 x 24; d) 36 x 421; e) 534 x 601.

4) Efectúe las siguientes: a) 342 x 183; b) 604 x 509; c) 721 x 1.503.

23. PROBLEMAS QUE LLEVAN A MULTIPLICACION

Además del problema que dimos como ejemplo en la sección anterior, vamos a considerar otros ejemplos que llevan a multiplicación.

Un conjunto de soldados está formado en 4 hileras, cada una de las cuales tiene 3 soldados. ¿Cuántos soldados hay? (Figura 45).

$$4 \times 3 = 12$$

o bien

$$3 \times 4 = 12$$

Un terreno rectangular mide 5 metros por un lado y 8 metros por el lado contiguo. ¿Cuántos metros cuadrados mide el terreno? (Figura 46).

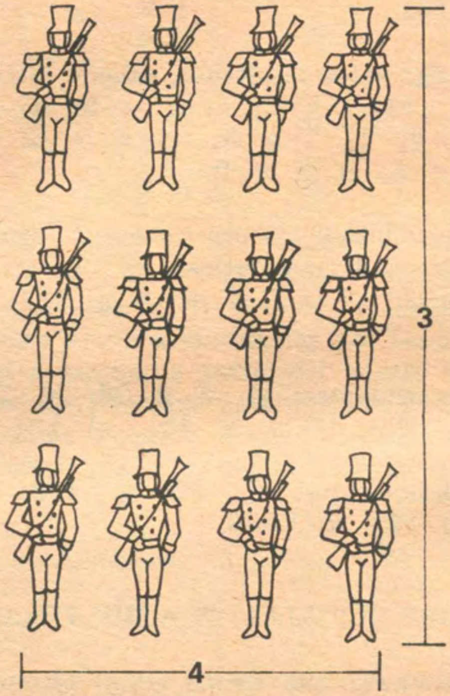


FIGURA 45

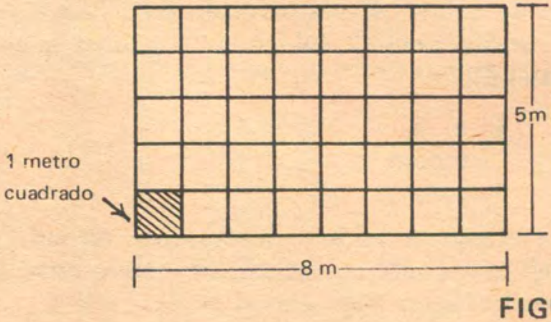


FIGURA 46

$5 \times 8 = 40$, o también $8 \times 5 = 40$

La respuesta es: 40 metros cuadrados.

Un edificio tiene 3 entradas (A, B, C) y dos salidas (D, E). ¿Cuántas maneras tiene un persona para entrar y salir del edificio? (Figura 47).

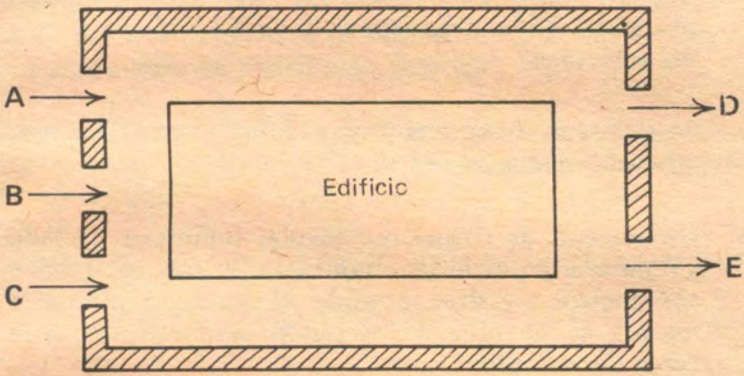


FIGURA 47

Los caminos posibles son:

(A, D), (A, E)
(B, D), (B, E)
(C, D), (C, E)

y por tanto el problema se puede resolver efectuando:

$$2 \times 3 = 6$$

o bien $3 \times 2 = 6$

EJERCICIOS (23)

1) En una caja hay 30 botellas. ¿Cuántas botellas hay en 18 cajas como esa?

2) En un recipiente caben 28 litros de leche. ¿Cuántos litros caben en 64 recipientes de la misma capacidad?

3) En una hora un vehículo recorre 63 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 12 horas, a la misma velocidad?

4) Se siembran 24 surcos y en cada uno hay 183 matas. ¿Cuántas matas hay en total?

5) Un terreno de forma rectangular mide por un lado 17 metros y por el lado contiguo 24 metros. ¿Cuántos metros cuadrados mide el terreno? ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercarlo, si la cerca tiene 3 hilos?

6) Para ir de una finca A a una finca B hay 3 caminos. Para ir de la finca B a la finca C hay 4 caminos. ¿De cuántas maneras puede una persona ir de la finca A a la finca C, pasando por B?

7) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al lanzar un dado? ¿Al lanzar dos dados? ¿Al lanzar tres dados?

8) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al lanzar una moneda? ¿Al lanzar dos monedas? ¿Al lanzar tres monedas?

24. LA DIVISION ENTRE NUMEROS NATURALES

Un problema que conduce a división entre números naturales es el siguiente:

En términos de conjuntos, sea un conjunto de 8 manzanas que se quiere repartir en 4 subconjuntos con el mismo número de elementos cada uno.

Si se reparten 8 manzanas entre 4 personas de modo que a cada una le corresponda el mismo número de manzanas, ¿cuántas manzanas recibe cada persona?

Si se hace una primera repartición, dando a cada persona una manzana, se sacan en total 4 manzanas y quedan otras 4 para repartir.

Al repartir las 4 que quedaban, no quedan manzanas para repartir

$$8 - 4 = 4$$
$$4 - 4 = 0$$

Se ha podido hacer la repartición 2 veces, o sea que cada persona recibe 2 manzanas.

Entonces se dice que 8 dividido entre 4 da como resultado 2.

$$8/4 = 2$$

Lo anterior se lee: "8 dividido 4 es igual a 2".

El número que se va a dividir, en este caso 8, se llama dividendo.

El número por el cual se va a dividir, en este caso 4, se llama divisor.

El resultado de la división se llama cociente. En este caso, el cociente es 2.

Observamos que el cociente es el número que multiplicado por el divisor da como resultado el dividendo. En el caso del ejemplo, se verifica que $2 \times 4 = 8$.

No siempre el cociente entre dos números naturales es un número natural.

O sea que la propiedad clausurativa no vale para la división entre números naturales.

Ejemplo: $5/3$ no es un número natural.

A cada multiplicación corresponden dos divisiones, como se ve en el siguiente ejemplo:

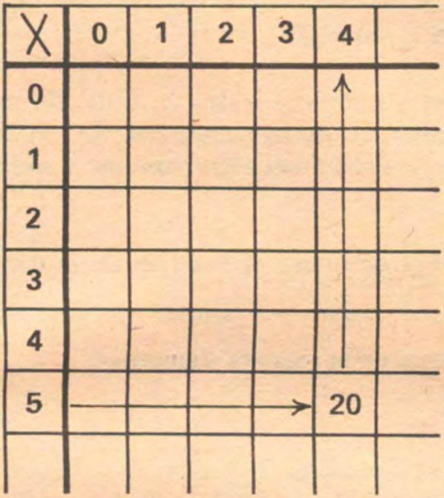
$$9 \times 3 = 27 \quad \begin{cases} 27/3 = 9 \\ 27/9 = 3 \end{cases}$$

La tabla de la multiplicación sirve para encontrar resultados de divisiones, de una manera parecida a como la tabla de la adición sirve para efectuar sustracciones. (Figura 48).

La división no cumple la propiedad asociativa, como veremos en el siguiente ejemplo:

$$(24/6)/2 = 4/2 = 2$$
$$24/(6/2) = 24/3 = 8$$

Cuando se escriba $24/6/2$, se entenderá que primero se efectúa $24/6$ y luego se divide el resultado obtenido por 2.



$20/5 = 4$

FIGURA 48

EJERCICIOS (24)

1) Halle en la tabla el resultado de cada una de las siguientes divisiones: a) 9/3; b) 12/2; c) 18/3; d) 24/3; c) 49/7.

2) Halle el producto y escriba las dos divisiones correspondientes, en cada uno de los siguientes casos: a) 8 x 9; b) 3 x 12), c) 5 x 25; d) 15 x 14; e) 234 x 19.

3) Se reparten 45 lápices entre 9 niños de modo que a cada uno le corresponda el mismo número de lápices. ¿Cuántos lápices corresponden a cada uno?

4) Se reparten 72 libras de arroz entre 8 personas, de modo que cada una reciba la misma cantidad. ¿Cuánto recibe cada una?

25. DIVISION CON RESIDUO

Si se quieren repartir 7 naranjas entre 2 niños de modo que cada quien reciba el mismo número de naranjas, se observa que al repartirlas, cada uno recibe 3 naranjas y sobra una naranja.

Esta naranja que sobra se llama el residuo de la división entre 7 y 2.

La operación se dispone de la manera siguiente:

$$7 \;\underline{|2\quad}$$

El dividendo es 7 y el divisor es 2. Para hallar el cociente, tenemos en cuenta los múltiplos de 2, o sea los resultados de multiplicar a 2 por 1, 2, 3, 4, . . .

Tenemos entonces que $2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$; $2 \times 3 = 6$; $2 \times 4 = 8$.

Esta última multiplicación da un resultado superior al número que se está repartiendo.

Así que escogemos la anterior y restamos el resultado, 6, del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 7 & \underline{2\quad} \\ -\underline{6} & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Escribimos 3 en el puesto del cociente, multiplicamos este número por 2 y escribimos el resultado debajo del dividendo, 7, para restarlo.

El resultado de esta resta es el residuo de la división.

Observamos que si al residuo le sumamos el producto del cociente por el divisor, se obtiene el dividendo.

$$1 + (3 \times 2) = 1 + 6 = 7$$

Consideremos ahora el caso siguiente:

$$24 \,\underline{|\,3\quad}$$

Conviene tener presentes el producto $3 \times 0 = 0$ y los 9 siguientes múltiplos del divisor para buscar el que conviene.

$$\begin{array}{l} 3 \times 0 = 0 \\ 3 \times 1 = 3 \\ 3 \times 2 = 6 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 3 \times 4 = 12 \\ 3 \times 5 = 15 \\ 3 \times 6 = 18 \\ 3 \times 7 = 21 \\ 3 \times 8 = 24 \leftarrow \text{este es el que conviene} \\ 3 \times 9 = 27 \end{array}$$

El que conviene es el mayor múltiplo del divisor que no es mayor que el dividendo.

La operación queda,

$$\begin{array}{rl} 24 & \underline{|\,3\quad} \\ -\underline{24} & \ 8 \\ 0 & \end{array}$$

El ejemplo anterior nos muestra que el residuo bien puede ser cero. En este caso, se dice que la división es exacta y se puede escribir

$$24/3 = 8$$

Veamos otro ejemplo.

$$38 \,\underline{|\; 7 \quad}$$

Comenzamos por tener presentes el producto 7×0 y los otros 9 múltiplos del divisor 7:

$7 \times 0 = 0$
$7 \times 1 = 7$
$7 \times 2 = 14$
$7 \times 3 = 21$
$7 \times 4 = 28$
$7 \times 5 = 35$ ← este es el que conviene
$7 \times 6 = 42$
$7 \times 7 = 49$
$7 \times 8 = 56$
$7 \times 9 = 63$

La operación queda entonces,

$$\begin{array}{r|l} 38 & 7 \\ \cline{2-2} -\underline{35} & 5 \\ 3 & \end{array}$$

De modo que el cociente es 5 y el residuo es 3.

Verificación: $3 + (5 \times 7) = 3 + 35 = 38$

Consideremos el siguientes caso:

$$5.348 \times 4$$

Comenzamos por repartir las unidades de mil, después las centenas, luego las decenas y finalmente las unidades.

Debemos tener en cuenta, como siempre, el producto 4 y los otros múltiplos siguientes del divisor.

$$\begin{array}{rl} 5348 & \underline{|\,4\qquad} \\ -\,\underline{4} & \;1 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 5348 & \underline{|\,4\qquad} \\ -\,\underline{4} & \;1 \\ 13 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 5348 & \underline{|\,4\qquad} \\ -\,\underline{4} & \;13 \\ 13 & \\ -\,\underline{12} & \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 \times 0 = 0 \\ 4 \times 1 = 4 \\ 4 \times 2 = 8 \\ 4 \times 3 = 12 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 4 \times 5 = 20 \\ 4 \times 6 = 24 \\ 4 \times 7 = 28 \\ 4 \times 8 = 32 \\ 4 \times 9 = 36 \end{array}$$

Descripción de los pasos anteriores: comenzamos por repartir 5 entre 4, para lo cual buscamos el producto que conviene en la tabla de los múltiplos del divisor. Este producto es 4 x 1 = 4.

Escribimos 1 en el cociente, que es el número de veces que "cabe", como máximo, 4 en 5.

Restamos el producto 1 x 4 de la cifra de las unidades de mil (5) y obtenemos como residuo 1.

Pasamos a la cifra de las centenas (3) la cual "bajamos" y la colocamos a continuación del residuo, 1, que hemos obtenido.

Buscamos en la tabla hasta cuantas veces "cabe" 4 en 13 y encontramos que el producto que conviene es 4 x 3 = 12, o sea que "cabe" hasta 3 veces.

Colocamos 3 en el cociente, a continuación del 1 que habíamos obtenido antes.

Efectuamos el producto, $3 \times 4 = 12$ y lo restamos de 13. Obtenemos como nuevo residuo, 1.

Continuamos la operación "bajando" la cifra de las decenas, o sea 4:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 5348 & \big|\underline{\;4\;\;\;\;\;} \\
- & \underline{4} & \;1337 \\
 & 13 & \\
- & \underline{12} & \\
 & 14 & \\
- & \underline{12} & \\
 & 28 & \\
- & \underline{28} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Después pasamos a la cifra de las unidades, o sea 8, y finalizamos la operación.

Hemos obtenido cero como residuo final, así que 1.337 es el cociente y el residuo es cero.

La división es exacta y podemos escribir.

$$5348/4 = 1.337$$

Efectuemos ahora

$$5348 \;\big|\underline{\;5\;\;\;\;\;}$$

Comenzamos por realizar la tabla de los nueve primeros múltiplos de 5 que siguen al producto 5 x 0 y procedemos como en el caso anterior.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 5348 & 5 \\ \cline{3-3}
- & 5 & 1069 \\ \cline{2-2}
 & 03 & \\
- & 0 & \\ \cline{2-2}
 & 34 & \\
- & 30 & \\ \cline{2-2}
 & 48 & \\
- & 45 & \\ \cline{2-2}
 & 3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
5 \times 0 = 0 \\
5 \times 1 = 5 \\
5 \times 2 = 10 \\
5 \times 3 = 15 \\
5 \times 4 = 20 \\
5 \times 5 = 25 \\
5 \times 6 = 30 \\
5 \times 7 = 35 \\
5 \times 8 = 40 \\
5 \times 9 = 45
\end{array}
$$

El primer residuo que se obtiene es cero.

Al bajar la cifra de las centenas, 3, observamos que 5 en 3 "no cabe", o mejor, "cabe 0 veces" por lo cual escribimos cero en el cociente.

El paso que sigue puede eliminarse, porque consiste en efectuar 0 x 5 = 0 y restar este resultado de 3: 3 − 0 = 3. Se habría podido bajar de una vez la cifra de las decenas, 4, después de escribir el cero en el cociente.

Tenemos entonces que el cociente entre 5.348 y 5 es 1.069 y el residuo es 3.

Vamos ahora a ver un ejemplo en el cual el divisior "no cabe" en la primera cifra de la izquierda, del dividendo.

$$
\begin{array}{rl}
12436 & \underline{|\,7\qquad\quad} \\
-\ \underline{0} & 01790 \\
12 & \\
-\ \underline{7} & \\
54 & \\
-\ \underline{49} & \\
63 & \\
-\ \underline{63} & \\
06 & \\
-\ \underline{0} & \\
6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
7 \times 0 = 0 \\
7 \times 1 = 7 \\
7 \times 2 = 14 \\
7 \times 3 = 21 \\
7 \times 4 = 28 \\
7 \times 5 = 35 \\
7 \times 6 = 42 \\
7 \times 7 = 49 \\
7 \times 8 = 56 \\
7 \times 9 = 63
\end{array}
$$

De modo que el cociente entre 12.436 y 7 es 1.790 (porque el cero de la izquierda no se escribe) y el residuo es 6.

Si el divisor tiene dos o más cifras, se procede de la misma manera, con la única diferencia de que se comienza por averiguar hasta cuántas veces "cabe" el divisor en el número que forman las primeras dos o más cifras del dividendo.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{rl}
3487 & \underline{|\,24\qquad} \\
-\ \underline{24} & 145 \\
108 & \\
-\ \underline{96} & \\
127 & \\
-\ \underline{120} & \\
7 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
24 \times 0 = 0 \\
24 \times 1 = 24 \\
24 \times 2 = 48 \\
24 \times 3 = 72 \\
24 \times 4 = 96 \\
24 \times 5 = 120 \\
24 \times 6 = 144 \\
24 \times 7 = 168 \\
24 \times 8 = 192 \\
24 \times 9 = 216
\end{array}
$$

Cociente: 145; residuo: 7

EJERCICIOS (25)

1) Efectúe la división y halle el cociente y el residuo entre:

   a) 28 y 9; b) 35 y 8; c) 42 y 7; d) 39 y 9; e) 524 y 3; f) 7.836 y 4; g) 124.318 y 32; h) 65.724 y 132.

2) Para cada uno de los casos anteriores, verifique que el residuo sumado con el producto del cociente por el divisor, da como resultado el dividendo.

3) Se reparten 12.348 cuadernos entre 315 escuelas, de modo que a cada una le toque igual número de cuadernos. ¿Cuántos cuadernos corresponden a cada escuela y cuantos cuadernos sobran?

4) Un repartidor de leche deja el mismo número de botellas en cada casa. Si repartió 1.724 botellas en 138 casas, ¿cuántas botellas dejó en cada casa y cuántas le sobraron?

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIOS (1)

1) La mayoría de la gente la asocia con números y también con figuras geométricas.

2) La aritmética y la geometría.

3) Es tan grande la extensión del conocimiento matemático, que no alcanza la vida de una ni de muchas personas para abarcarlo.

4) Las aplicaciones prácticas que los científicos y los técnicos dan a la matemática producen adelantos que en muchos casos proporcionan comodidades y mejoran la vida de las personas.

5) La belleza que encierra y el placer intelectual que proporciona.

6) Se debe muchas veces a la forma como la aprendieron cuando niños.

7) Esta respuesta depende de cada persona, según sus propias experiencias.

8) Para facilitar el trabajo con los conceptos que en ella se utilizan.

9) De manera parecida a como actúa el ejercicio físico adecuado para el desarrollo armonioso del cuerpo.

EJERCICIOS (2)

1) La enseñanza de los conjuntos desde los niveles elementales.

2) Es unificador y permite usarlo en varios campos de la ciencia.

3) Con la lógica. Por ello contribuye al buen razonamiento.

4) El conjunto de los vagones de un tren. El conjunto de los pasajeros de un autobus. El conjunto de las personas que escuchan un programa de radio (Pueden ser otros los ejemplos).

5) Arboleda (conjunto de árboles). Pollada (conjunto de pollitos) banco de atún (conjunto de peces de ese nombre, cuando están agrupados). Pueden ser otros los nombres colectivos escogidos como ejemplos.

EJERCICIOS (3)

1)

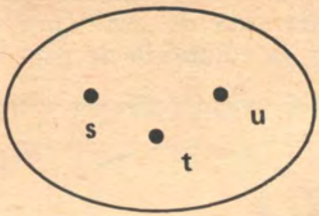


FIGURA 49

2) $\overline{V} \subset A$

3) $b \in V$; $c \notin \overline{V}$; $g \in A$

4) La gallina y el conejo son animales de la granja; el conejo no pertenece al conjunto de las vacas; la gallina pertenece al conjunto de los animales de la granja que no son vacas; d es un elemento del conjunto de las vacas.

5) {c, a, b} , {c, b, a} , {b, c, a} ; pueden ser también, {a, c, b} {b, a, c}.

EJERCICIOS (4)

1) {t, e} 2) {e} 3) {t} 4)

EJERCICIOS (5)

1)

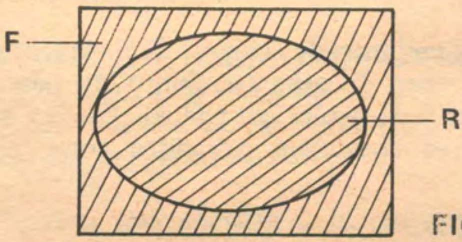


FIGURA 50

2) La región coloreada de azul (por ejemplo) representa a R y la coloreada de rojo representa a $\overline{R}$.

3)

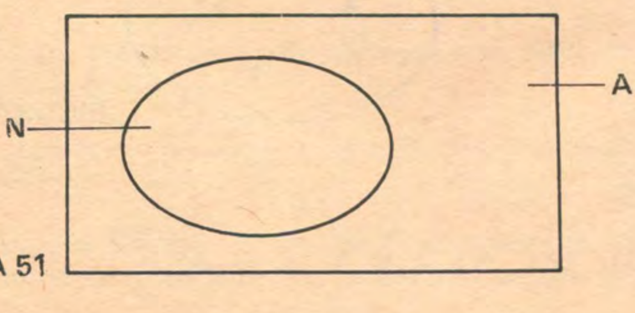


FIGURA 51

4)

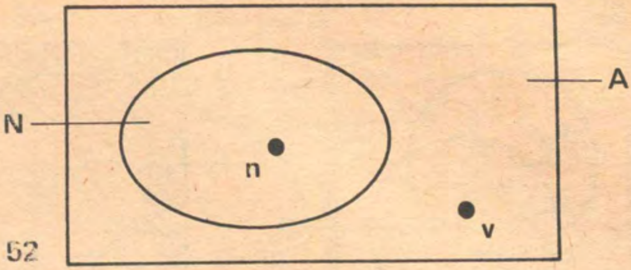


FIGURA 52

5)

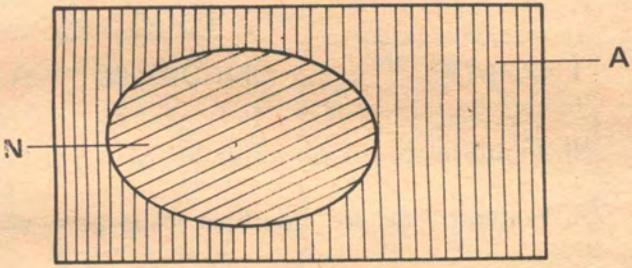


FIGURA 53

EJERCICIOS (6)

1)

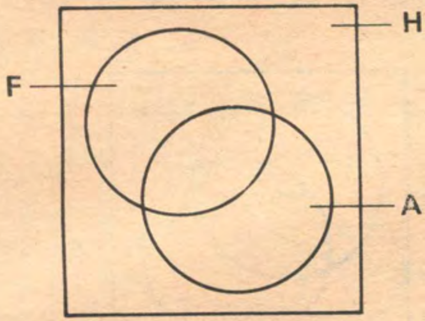


FIGURA 54

2)

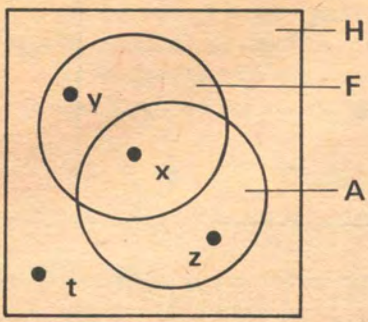


FIGURA 55

3)

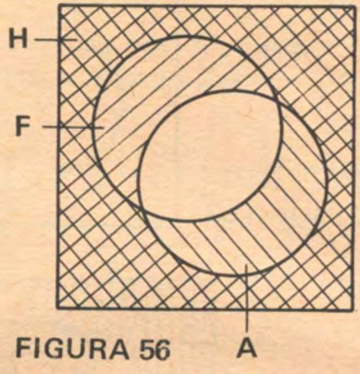


FIGURA 56

4) El conjunto de los hombres no altos pero sí flacos.

5) El conjunto de los hombres altos pero no flacos.

6) El conjunto de los hombres que no son altos ni flacos.

7) El de los hombres que son altos y flacos.

EJERCICIOS (7)

1)

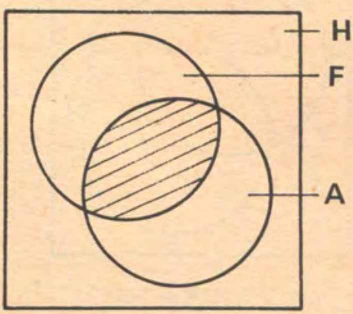
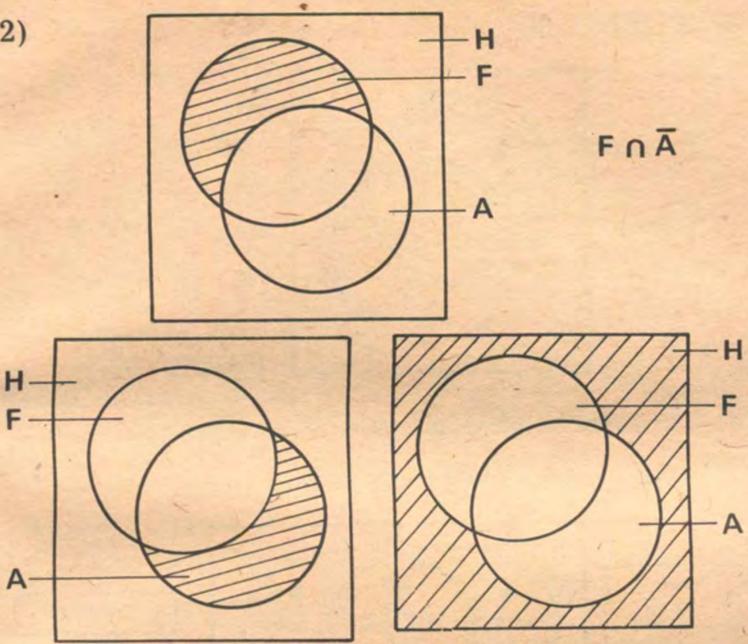


FIGURA 57

2)



$\bar{F} \cap A$ FIGURA 58 $\bar{F} \cap \bar{A}$

3) $u \in (F \cap A)$; $v \in (F \cap \bar{A})$; $t \in (\bar{F} \cap A)$; $s \in (\bar{F} \cap \bar{A})$

4) Juana entendió correctamente; las demás no.

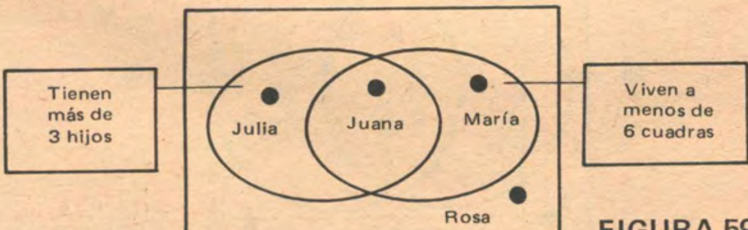


FIGURA 59

EJERCICIOS (8)

1)

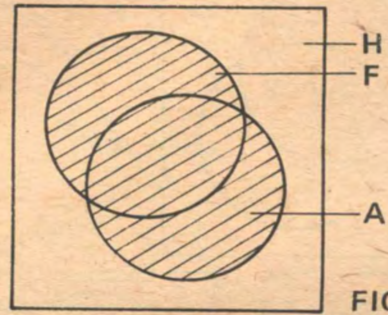


FIGURA 60

2) t es un hombre flaco y/o alto. 3) $\overline{\overline{F} \cap \overline{A}}$

4) Luis no entendió el texto del aviso.

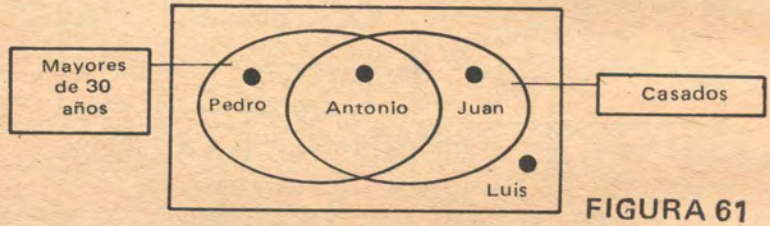


FIGURA 61

EJERCICIOS (9)

1)

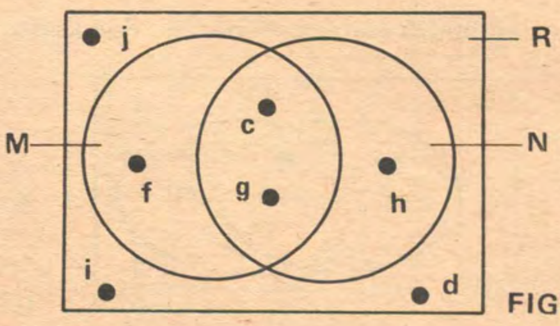


FIGURA 62

2) $M \cap N = \{c, g\}$

3) $M \cup N = \{c, f, g, h\}$

4 $\overline{M} = \{d, h, i, j\}$; $\overline{N} = \{d, f, i, j\}$; $\overline{M} \cap \overline{N} = \{d, i, j\}$; $\overline{M \cup N} = \{d, i, j\}$

5) $\overline{R} = \phi$; $\overline{\phi} = R$

6) $\overline{M \cap N} = \{d, f, h, i, j\}$; $\overline{M} \cup \overline{N} = \{d, h, i, j, f\}$

EJERCICIOS (10)

1)

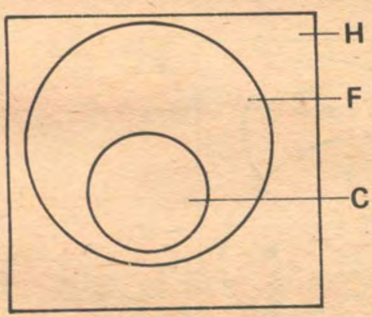


FIGURA 63

2) $C \subset F$ 3) $C \cap \overline{F} = \phi$

4) $Q \subset R$

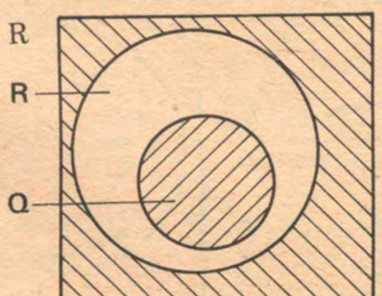


FIGURA 64

EJERCICIOS (11)

1) En el caso b), porque el hermano del padre es el mismo tío. En cambio, su lápiz no es el mismo mío, si se trata de dos lápices.

2) $T \subset J$, $J \subset T$; por lo tanto, $T = J$. $T \subset K$, $J \subset K$, $U \subset K$. Además, de acuerdo con la definición de inclusión, un conjunto está contenido en sí mismo, porque todos los elementos del conjunto le pertenecen. $T \subset T$; $J \subset J$; $U \subset U$; $K \subset K$. Desde luego, también todo conjunto es igual a sí mismo: $T = T$; $J = J$; $U = U$; $K = K$.

3)

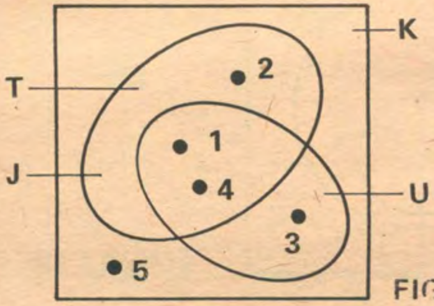


FIGURA 65

EJERCICIOS (12)

1) a) $C \subset R$; b) $R \subset V$

2) $C \subset V$. (Todos los conejos son vertebrados).

3)

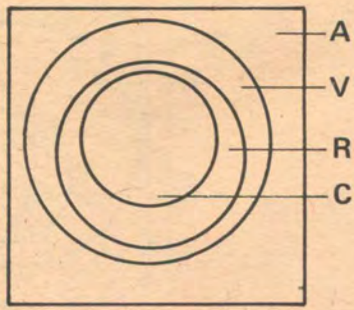


FIGURA 66

4) $C \cap \overline{R} = \phi$; $R \cap \overline{V} = \phi$; $C \cap \overline{V} = \phi$

5) Conclusión: todos los soldados mueren jóvenes.

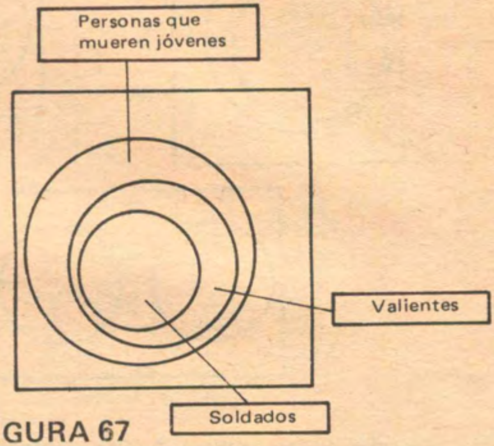


FIGURA 67

6) No es correcta.

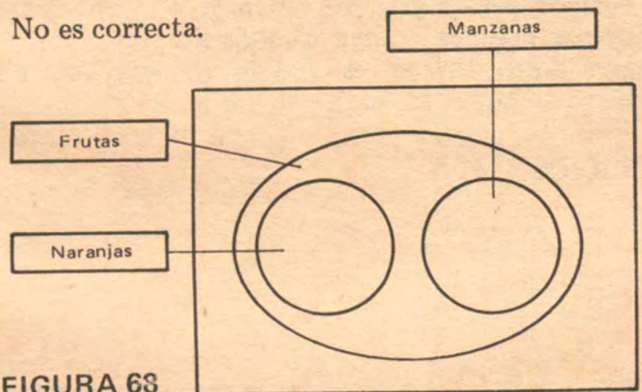


FIGURA 68

EJERCICIOS (13)

1) $B \subset V$

2) $V \cap G \neq \phi$ 3) $B \cap C = \phi$

4)

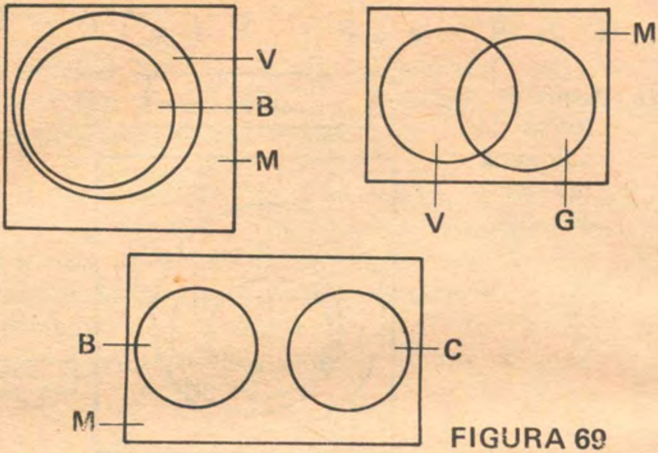


FIGURA 69

5) a) Algunos perros negros son grandes (o también, algunos perros grandes son negros); b) Todos los perros grandes comen abundantemente; c) Ningún perro liviano es grande (o también, ningún perro grande es liviano).

EJERCICIOS (14)

1)

P	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
Q	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
	1	2	3	4

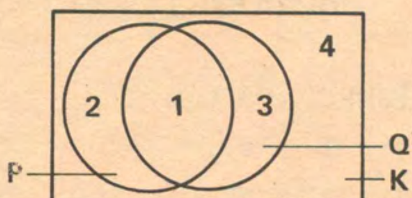


FIGURA 70

2) a)

P	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
Q	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\overline{Q}$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$P \cap \overline{Q}$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$

b)

P	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
Q	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\overline{P}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\overline{P} \cap Q$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$

c)

P	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
Q	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\overline{P}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\overline{Q}$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\overline{P} \cap \overline{Q}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$

3) a)

P	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
Q	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\overline{Q}$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$P \cup \overline{Q}$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$

b)

P	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
Q	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\overline{P}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\overline{P} \cup Q$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

c)

P	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
Q	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\overline{P}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\overline{Q}$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\overline{P} \cup \overline{Q}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$

4)

a)

ϕ	$\notin$	$\notin$
$\overline{\phi}$	$\in$	$\in$
R	$\in$	$\in$

b)

P	$\in$	$\notin$
$P \cup P$	$\in$	$\notin$

c)

P	$\in$	$\notin$
$P \cap P$	$\in$	$\notin$

d)

P	$\in$	$\notin$
$\overline{P}$	$\notin$	$\in$
$P \cap \overline{P}$	$\notin$	$\notin$
ϕ	$\notin$	$\notin$

e)

P	$\in$	$\notin$
R	$\in$	$\in$
$P \cup R$	$\in$	$\in$

f)

P	$\in$	$\notin$
R	$\in$	$\in$
$P \cap R$	$\in$	$\notin$

g)

P	$\in$	$\notin$
ϕ	$\notin$	$\notin$
$P \cup \phi$	$\in$	$\notin$

EJERCICIOS (15)

1)

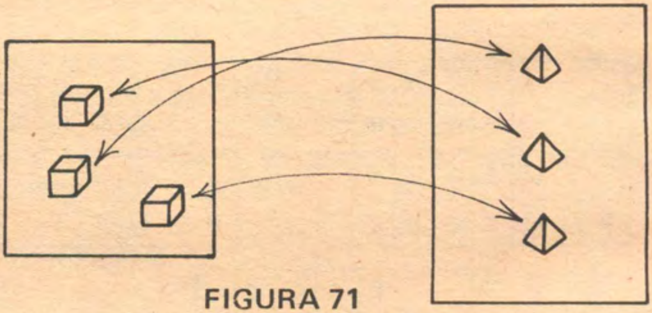


FIGURA 71

2) Figura 72

3) a) $\#(A) = 3$; b) $\#(B) = 4$; c) $\#(C) = 2$; d) $\#(D) = 1$; e) $\#(E) = 0$, porque $E = \phi$

4) a) $A \cap B = \{b, c,\}$; $\#(A \cap B) = 2$

b) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$; $\#(A \cup B) = 5$

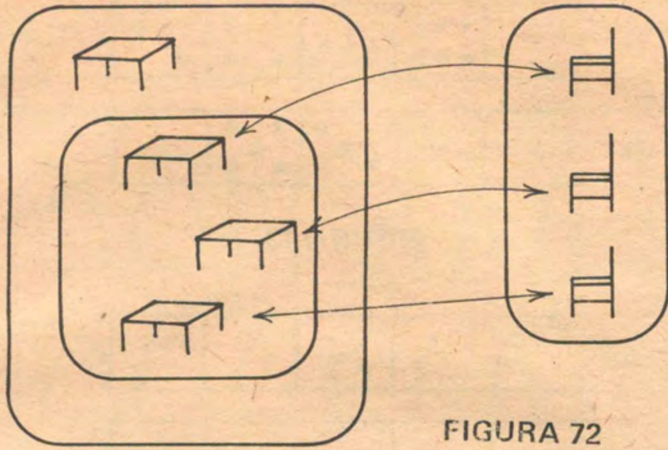


FIGURA 72

c) $A \cap C = \{a\}; \# (A \cap C) = 1$

d) $A \cup C = \{a, b, c, e\}; \# (A \cup C) = 4$

e) $D \cup C = \{b, a, e\}; \# (D \cup C) = 3$

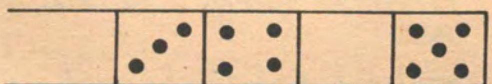
EJERCICIOS (16)

1) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

2) a) 9; b) 14; c) 21; d) 40

3) a) 110; b) 304; c) 503; d) 2.330

4)

a) 

b) 

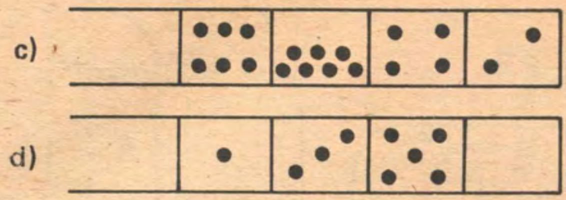


FIGURA 73

5)

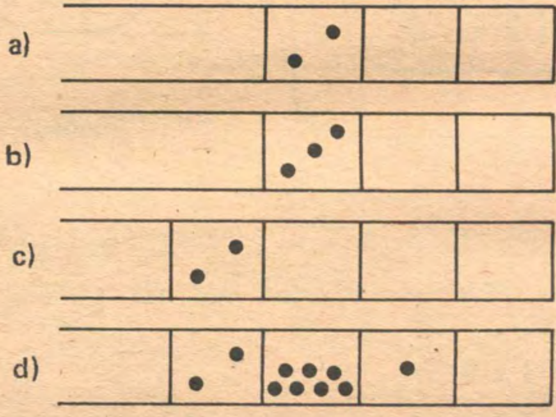


FIGURA 74

6) a) 4 unidades de mil, 8 centenas, 3 decenas, 2 unidades.

b) 7 unidades de mil, 4 centenas, 9 decenas, 1 unidad.

c) 1 unidad de mil, cero centenas, 3 decenas, 4 unidades.

7) a) 34; b) 85; c) 70; d) 508; e) 4.013

EJERCICIOS (17)

1) $\#(P \cup Q) = 11$

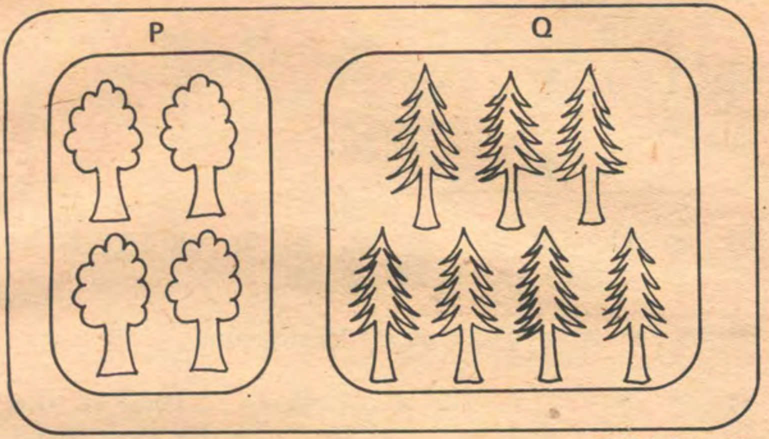


FIGURA 75

2) Puede ser 5, 6, 7

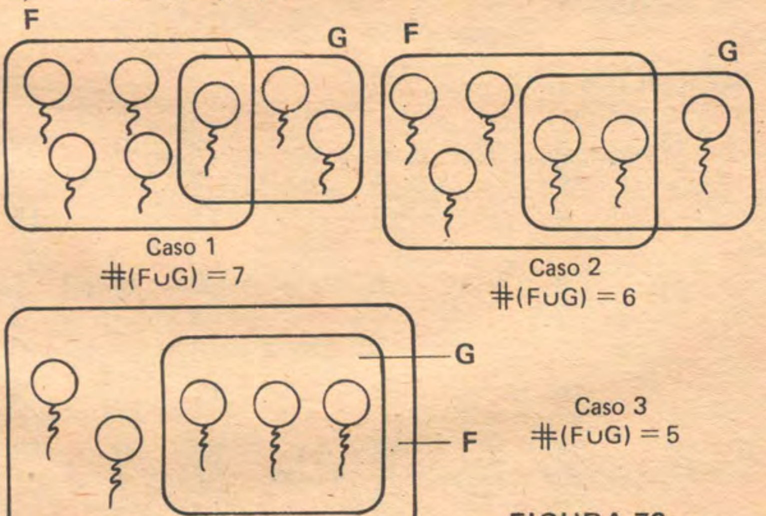


FIGURA 76

3) $4 + 7 = 11$

4)

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

5) a) 11; b) 12; c) 12; d) 9; e) 18; f) 15; g) 13; h) 15; i) 13; j) 14.

6) $7 + 9 = 16$; compró 16 animales.

7) $7 + 5 = 12$; se obtuvieron 12 litros en total.

8) $8 + 9 = 17$; entre ambas produjeron 17 cargas de trigo.

EJERCICIOS (18)

1) a) $\begin{array}{r} 3 \\ +\ 6 \\ \hline 9 \end{array}$; b) $\begin{array}{r} 8 \\ +\ 4 \\ \hline 12 \end{array}$; c) $\begin{array}{r} 2 \\ +\ 9 \\ \hline 11 \end{array}$; d) $\begin{array}{r} 8 \\ +\ 7 \\ \hline 15 \end{array}$

2) a) $\begin{array}{r} 3 \\ 4 \\ +\ 9 \\ \hline 16 \end{array}$; b) $\begin{array}{r} 8 \\ 5 \\ +\ 2 \\ \hline 15 \end{array}$; c) $\begin{array}{r} 6 \\ 3 \\ +\ 2 \\ \hline 11 \end{array}$; d) $\begin{array}{r} 5 \\ 2 \\ +\ 6 \\ \hline 13 \end{array}$

3) a) $\begin{array}{r} 24 \\ +\ 13 \\ \hline 37 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 58 \\ +\ 21 \\ \hline 79 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 36 \\ +\ 42 \\ \hline 78 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 57 \\ +\ 41 \\ \hline 98 \end{array}$

4) a) $\begin{array}{r} 36 \\ +\ 48 \\ \hline 84 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 19 \\ +\ 32 \\ \hline 51 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 75 \\ +\ 16 \\ \hline 91 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 34 \\ +\ 28 \\ \hline 72 \end{array}$

5) a) $\begin{array}{r} 23 \\ 34 \\ +\ 21 \\ \hline 78 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 53 \\ 29 \\ +\ 18 \\ \hline 100 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 57 \\ 24 \\ +\ 31 \\ \hline 112 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 61 \\ 43 \\ +\ 88 \\ \hline 192 \end{array}$

6) a) $\begin{array}{r} 324 \\ +\ 123 \\ \hline 447 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 161 \\ +\ 34 \\ \hline 195 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 208 \\ +\ 39 \\ \hline 247 \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 650 \\ +\ 94 \\ \hline 744 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 542 \\ +\ 8 \\ \hline 550 \end{array}$ f) $\begin{array}{r} 523 \\ +\ 17 \\ \hline 540 \end{array}$

7) $\begin{array}{r} 358 \\ +\ 519 \\ \hline 877 \end{array}$ Gastó 877 pesos.

8) $\begin{array}{r} 319 \\ 217 \\ +\ 414 \\ \hline 950 \end{array}$ En los tres viajes transportó 950 pasajeros.

9) Hay 4 decenas completas.

10) Hay 3 centenas completas.

EJERCICIOS (19)

1) a) 3 unidades de mil; 4 centenas; 0 decenas; 2 unidades.

b) 5 centenas, 3 decenas, 8 unidades.

c) 1 centena de mil; 0 decenas de mil; 4 unidades de mil; 5 centenas; 8 decenas; 3 unidades.

d) 2 unidades de millón; 3 centenas de mil; 0 decenas de mil; 5 unidades de mil; 1 centena; 0 decenas; 4 unidades.

2) a) Trescientos cincuenta y dos; b) Ocho mil cuatrocientos veintiuno; c) Ochenta y dos mil ciento tres; d) Sesenta y siete mil cuatrocientos; e) Treinta y un millones, cuatrocientos sesenta y siete mil ochocientos nueve; f) Quinientos cuatro millones seiscientos setenta y un mil uno.

3) a) 207; b) 504.783; c) 62.532.407; d) 432.000.024.

EJERCICIOS (20)

1) a) 4; b) 5; c) 6; d) 6; e) 0.

a) 4 + 5 = 9; b) 5 + 3 = 8; c) 6 + 1 = 7; d) 6 + 0 = 6; e) 0 + 3 = 3

2) a) 3 + 4 = 7; 7 − 4 = 3; 7 − 3 = 4

b) 8 + 5 = 13; 13 − 5 = 8; 13 − 8 = 5

c) 9 + 7 = 16; 16 − 7 = 9; 16 − 9 = 7

d) 8 + 6 = 14; 14 − 8 = 6; 14 − 6 = 8

e) 7 + 6 = 13; 13 − 7 = 6; 13 − 6 = 7

f) 12 + 8 = 20; 20 − 12 = 8; 20 − 8 = 12

g) 23 + 45 = 68; 68 − 23 = 45; 68 − 45 = 23.

3)

a) $\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 38 \\ -\ 29 \\ \hline 09 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} \textcircled{1}\textcircled{1} \\ 534 \\ -\ 248 \\ \hline 286 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 672 \\ -\ \ 91 \\ \hline 581 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} \textcircled{1}\textcircled{1} \\ 5384 \\ -2095 \\ \hline 3289 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} \textcircled{1}\textcircled{1} \\ 6.308.521 \\ -\ \ 983.521 \\ \hline 5.325.000 \end{array}$

Verificación:

a) $\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 29 \\ +\ \ 9 \\ \hline 38 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} \textcircled{1}\textcircled{1} \\ 248 \\ +\ 286 \\ \hline 534 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 581 \\ +\ \ 91 \\ \hline 672 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} \textcircled{1}\textcircled{1} \\ 2095 \\ +3289 \\ \hline 5384 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 5.325.000 \\ +\ \ 983.521 \\ \hline 6.308.521 \end{array}$

4) Primer método:

$\begin{array}{r} 500 \\ -\ \ 75 \\ \hline 425 \end{array}$ $\begin{array}{r} 425 \\ -\ 123 \\ \hline 302 \end{array}$ $\begin{array}{r} 302 \\ -\ \ 29 \\ \hline 273 \end{array}$

$\begin{array}{r} 273 \\ -\ \ 88 \\ \hline 185 \end{array}$ $\begin{array}{r} 185 \\ -\ \ \ 9 \\ \hline 176 \end{array}$

Segundo método:

$\begin{array}{r} 75 \\ 123 \\ 29 \\ 88 \\ +\ \ \ 9 \\ \hline 324 \end{array}$ $\begin{array}{r} 500 \\ -\ 324 \\ \hline 176 \end{array}$

Le sobraron 176 pesos.

5) $\begin{array}{r} 1978 \\ -\ 1943 \\ \hline 0035 \end{array}$ 35 años.

6)

$$\begin{array}{r} 320 \\ 180 \\ +\ \ 63 \\ \hline 563 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1304 \\ -\ \ 563 \\ \hline 0741 \end{array}$$

También se puede hacer así:

$$\begin{array}{r} 1304 \\ -\ \ 320 \\ \hline 0984 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 984 \\ -\ \ 180 \\ \hline 804 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 804 \\ -\ \ 63 \\ \hline 741 \end{array}$$

Le faltan 741 kilómetros por recorrer.

EJERCICIOS (21)

1)

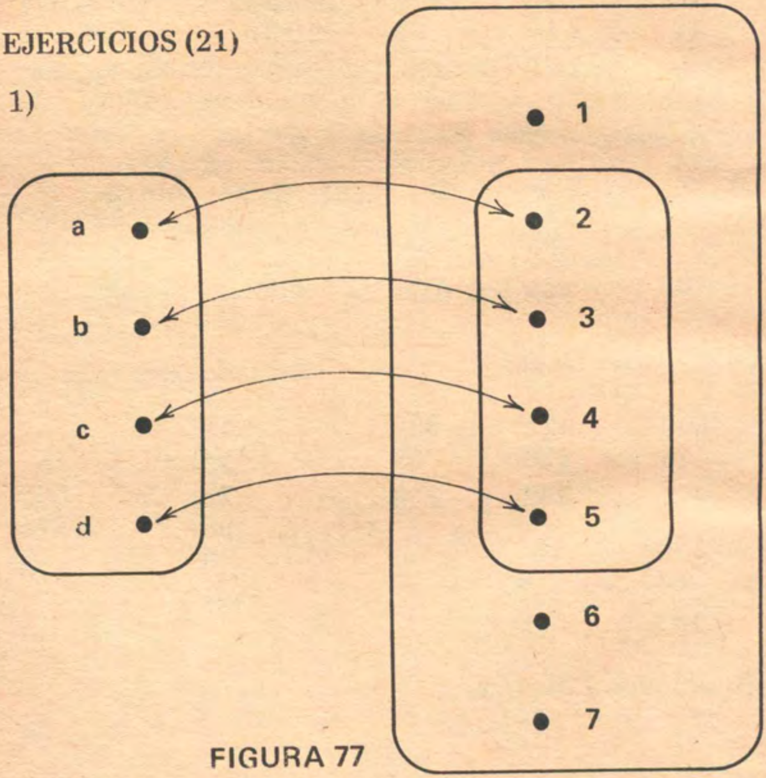


FIGURA 77

2) a) $9 > 7$; b) $31 > 14$; c) $47 > 29$; d) $702 > 345$; e) $6.959 > 1.538$; f) $82.507 > 75.619$

3) a) 4.734 > 4.629; b) 38.421 > 38.394;
c) 734.931 > 734.098; d) 3.452.809 > 3.452.805

4) En el punto 2: a) 9 > 7; 7 < 9; b) 31 > 14; 14 < 31 c) 47 > 29; 29 < 47; d) 702 > 345; 345 < 702; e) 6.959 > 1.538; 1.538 < 6.959; f) 82.507 > 75.619; 75.619 < 82.507

En el punto 3: a) 4.734 > 4.629; 4.629 < 4.734

b) 38.421 > 38.394; 38.394 < 38.421

c) 734.931 > 734.098; 734.098 < 734.931

d) 3.452.809 > 3.452.805; 3.452.805 < 3.452.809

5) En el punto 1) 7 − 4 = 3; 3 + 4 = 7

En el punto 2) a) 9 − 7 = 2; 2 + 7 = 9

b) 31 − 14 = 17; 17 + 14 = 31

c) 47 − 29 = 18; 18 + 29 = 47

d) 702 − 345 = 357; 357 + 345 = 702

e) 6.959 − 1.538 = 5.421; 1.538 + 5.421 = 6.959

f) 82.507 − 75.619 = 6.888; 6.888 + 75.619 = 82.507

En el punto 3) a) 4.734 − 4.629 = 105; 105 + 4.629 = 4.734

b) 38.421 − 38.394 = 27; 27 + 38.394 = 38.421

c) 734.931 − 734.098 = 833; 833 + 734.098 = 734.931

d) 3.452.809 − 3.452.805 = 4; 4 + 3.452.805 = 3.452.809

EJERCICIOS (22)

1) a) 24; b) 30; c) 63; d) 32; e) 45; f) 56;
g) 36; h) 0; i) 3; j) 0

2) a) $\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 3 \\ \hline 39 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 4 \\ \hline 48 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 11 \\ \times\ 7 \\ \hline 77 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 233 \\ \times\ 2 \\ \hline 466 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 12.304 \\ \times\ 3 \\ \hline 36.912 \end{array}$

3) a) $\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 3 \\ \hline 84 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 39 \\ \times\ 7 \\ \hline 273 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 24 \\ \hline 68 \\ 34 \\ \hline 408 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 421 \\ \times\ 36 \\ \hline 2526 \\ 1263 \\ \hline 15156 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 534 \\ \times\ 601 \\ \hline 534 \\ 32040 \\ \hline 320934 \end{array}$

4) a) $\begin{array}{r} 342 \\ \times\ 183 \\ \hline 1026 \\ 2736 \\ +\ 342 \\ \hline 62586 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 604 \\ \times\ 509 \\ \hline 5436 \\ 30200 \\ \hline 307436 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 1503 \\ \times\ 721 \\ \hline 1503 \\ 3006 \\ 10521 \\ \hline 1083663 \end{array}$

EJERCICIOS (23)

1) $\begin{array}{r} 30 \\ \times\ 18 \\ \hline 240 \\ +\ 30 \\ \hline 540 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 64 \\ \hline 112 \\ +\ 168 \\ \hline 1792 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 63 \\ \times\ 12 \\ \hline 126 \\ +\ 63 \\ \hline 756 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 183 \\ \times\ 24 \\ \hline 732 \\ +\ 366 \\ \hline 4392 \end{array}$

Hay 540 botellas	Caben 1.792 litros	Recorrerá 756 kilómetros	Hay 4.392 matas

5) $\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 24 \\ \hline 68 \\ +\ 34\ \ \\ \hline 408 \end{array}$ Perímetro: (en metros) $= \left\{ \begin{array}{l} 17 \times 2 = 34 \\ 24 \times 2 = \underline{48} \\ \qquad\quad\ \ 82 \end{array} \right.$ $82 \times 3 = 246$ metros de alambre

Area: 408 metros cuadrados.

6) $3 \times 4 = 12$; de 12 maneras.

7) Al lanzar 1 dado, 6 resultados diferentes; uno por cada cara.

$1 \times 6 = 6$; al lanzar dos dados: $6 \times 6 = 36$; 36 resultados diferentes. Al lanzar tres dados: $6 \times 6 \times 6 = 216$; 216 resultados diferentes.

8) Al lanzar una moneda, puesto que tiene 2 caras, los resultados posibles son 2: $1 \times 2 = 2$. Para 2 monedas: $2 \times 2 = 4$. Para 3 monedas: $2 \times 2 \times 2 = 8$

EJERCICIOS (24)

1) a) 3; b) 6; c) 6; d) 8; e) 7.

2) a) $8 \times 9 = 72$; $72/9 = 8$; $72/8 = 9$

b) $3 \times 12 = 36$; $36/12 = 3$; $36/3 = 12$

c) $5 \times 25 = 125$; $125/5 = 25$; $125/25 = 5$

d) $15 \times 14 = 220$; $220/15 = 14$; $220/14 = 15$

e) $234 \times 19 = 4446$; $4446/19 = 234$; $4446/234 = 19$

3) $45/9 = 5$; a cada uno le corresponden 5 lápices.

4) $72/8 = 9$; cada una recibe 9 libras de arroz.

EJERCICIOS (25)

1) a)

$$\begin{array}{r|l} 28 & 9 \\ \cline{2-2} -27 & 3 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Cociente = 3; residuo = 1

b)

$$\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \cline{2-2} -32 & 4 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Cociente = 4; residuo = 3

c)

$$\begin{array}{r|l} 42 & 7 \\ \cline{2-2} -42 & 6 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Cociente = 6, residuo = 0

d)

$$\begin{array}{r|l} 39 & 9 \\ \cline{2-2} -36 & 4 \\ \cline{1-1} 03 & \end{array}$$

Cociente = 4, residuo = 3

e)

$$\begin{array}{r|l} 524 & 3 \\ \cline{2-2} 3 & 174 \\ \cline{1-1} 22 & \\ -21 & \\ \cline{1-1} 14 & \\ -12 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Cociente = 174; residuo = 2

f)

$$\begin{array}{r|l} 7836 & 4 \\ \cline{2-2} -4 & 1959 \\ \cline{1-1} 38 & \\ -36 & \\ \cline{1-1} 23 & \\ -20 & \\ \cline{1-1} 36 & \\ -36 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Cociente = 1959; residuo = 0

g) $\begin{array}{r|l} 124318 & 32 \\ \hline -96 & 03884 \\ \hline 283 & \\ -256 & \\ \hline 271 & \\ -256 & \\ \hline 158 & \\ -128 & \\ \hline 30 & \end{array}$

$32 \times 0 = 0$
$32 \times 1 = 32$
$32 \times 2 = 64$
$32 \times 3 = 96$
$32 \times 4 = 128$
$32 \times 5 = 160$
$32 \times 6 = 192$
$32 \times 7 = 224$
$32 \times 8 = 256$
$32 \times 9 = 288$

Cociente = 3.884; residuo = 30

h) $\begin{array}{r|l} 65724 & 132 \\ \hline -528 & 497 \\ \hline 1292 & \\ -1188 & \\ \hline 1044 & \\ -924 & \\ \hline 120 & \end{array}$

$132 \times 0 = 0$
$132 \times 1 = 132$
$132 \times 2 = 264$
$132 \times 3 = 396$
$132 \times 4 = 528$
$132 \times 5 = 660$
$132 \times 6 = 792$
$132 \times 7 = 924$
$132 \times 8 = 1056$
$132 \times 9 = 1188$

Cociente = 497; residuo = 120

2) a) $1 + (3 \times 9) = 1 + 27 = 28$

b) $3 + (4 \times 8) = 3 + 32 = 35$

c) $0 + (6 \times 7) = 0 + 42 = 42$

d) $3 + (4 \times 9) = 3 + 36 = 39$

e)

$$\begin{array}{r} 174 \\ \times\ 3 \\ \hline 522 \\ +\ 2 \\ \hline 524 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{r} 1959 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 7836 \\ +\ \ 0 \\ \hline 7836 \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{r} 3884 \\ \times\ 32 \\ \hline 7768 \\ 11652 \\ \hline 124288 \\ +\ \ \ \ 30 \\ \hline 124318 \end{array}$$

h)

$$\begin{array}{r} 497 \\ \times\ 132 \\ \hline 994 \\ 1491 \\ 497 \\ \hline 65604 \\ +\ \ 120 \\ \hline 65724 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{r|l} 12348 & 315 \\ \cline{2-2} -\ 945 & 039 \\ \cline{1-1} 2898 & \\ -\ 2835 & \\ \cline{1-1} 0063 & \end{array}$$

315 x 0 = 0
315 x 1 = 315
315 x 2 = 630
315 x 3 = 945
315 x 4 = 1260
315 x 5 = 1575
315 x 6 = 1890
315 x 7 = 2205
315 x 8 = 2520
315 x 9 = 2835

A cada escuela le corresponden 39 cuadernos y sobran 63 cuadernos.

4)

$$\begin{array}{r|l} 1724 & 138 \\ \cline{2-2} -\ 138 & 12 \\ \cline{1-1} 344 & \\ -\ 276 & \\ \cline{1-1} 68 & \end{array}$$

138 x 0 = 0
138 x 1 = 138
138 x 2 = 276
138 x 3 = 414
138 x 4 = 552
138 x 5 = 990
138 x 6 = 1028
138 x 7 = 1266
138 x 8 = 1404
138 x 9 = 1242

Dejó 12 botellas en cada casa y le sobraron 68 botellas.

NUEVA BIBLIOTECA POPULAR DE EDITORA DOSMIL

TITULOS EN CIRCULACION

1. No nos volvamos locos (Higiene mental)
2. Juguemos ajedrez
3. Nosotros somos así (Biología humana)
4. Relaciones humanas
5. Comamos y bebamos bien
6. Orientación familiar
7. Aprendamos ortografía
8. Nuestros equinos (Caballos, asnos y mulas)
9. Me llamo Simón Bolívar
10. Artesanías
11. Somos comunidad organizada
12. Mujeres ilustres
13. Decoración de la casa
14. Contabilidad agropecuaria
15. Aprendamos mecánica
16. Instalaciones agropecuarias
17. Aprendamos construcción
18. Presentación personal
19. La política
20. El cacao

Aprendamos matemáticas